I. megoldás. Legyen az AM egyenesnek a k_2 körrel alkotott másik metszéspontja D. (A D pont mindig létrejön, mert ha az AM egyenes érintené a k_2 kört, akkor az M pontot a k_2 kör O_2 középpontjával összekötő egyenes merőleges volna az AM egyenesre, vagyis az ABO_2M négyszög húrnégyszög lenne, tehát az O_2 pont rajta lenne a k_1 körvonalon. Ez viszont nyilván nem lehet. – Az ábrán D pótlandó.)

1986-04-169-1.eps

$MAB\sphericalangle = MBC\sphericalangle$, mint a k_1 kör MB ívéhez tartozó kerületi, illetve érintő szárú kerületi szög. $MBC\sphericalangle = MDC\sphericalangle$, mert mindkettő a k_2 kör MC ívéhez tartozó kerületi szög. Tehát

$$DAB\sphericalangle = MAB\sphericalangle = MDC\sphericalangle = ADC\sphericalangle,$$

és így az AB egyenes párhuzamos a CD egyenessel.

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$CAD\sphericalangle = CAM\sphericalangle = ABM\sphericalangle = BDM\sphericalangle = BDA\sphericalangle.$$

Ezért az AC egyenes párhuzamos a BD egyenessel.

Így az $ABDC$ négyszög paralelogramma, ezért átlói felezik egymást, tehát az AM egyenes valóban áthalad a BC szakasz felezőpontján.

II. megoldás. Legyen $ABM\sphericalangle = \alpha$, $MAB\sphericalangle = \beta$. Legyen az F pont az AM egyenesnek a BC egyenessel alkotott metszéspontja. A kerületi szögek tételének többszöri felhasználásával kapjuk, hogy

$$MAC\sphericalangle = \alpha, \quad MCB\sphericalangle = \alpha, \quad MBC\sphericalangle = \alpha.$$

Ennek alapján a BFM és AFB háromszögek, továbbá a CFM és AFC háromszögek hasonlóak, mert szögeik egyenlőek. Ekkor viszont a megfelelő oldalak arányai is egyenlőek, azaz

$$\frac{BF}{FM} = \frac{AF}{FB}, \quad \text{ebből}: \quad (BF)^2 = AF \cdot FM, \quad \text{illetve} \tag{1}$$

$$\frac{CF}{FM} = \frac{AF}{FC}, \quad \text{azaz} \quad (CF)^2 = AF \cdot FM. \tag{2}$$

(1) és (2) egybevetéséből kapjuk, hogy $BF = CF$, vagyis az F pont valóban felezi a BC szakaszt.

Ezzel a bizonyítandó állítást beláttuk.