I. megoldás. A P pont pontosan akkor van az AC átlón, ha a DP egyenes AC-vel való P_1 metszéspontja és a BP egyenes AC-vel való P_2 metszéspontja egybeesik: $P_1=P_2$ (1. ábra). Ehhez elég belátni, hogy $CP_1=CP_2$.

1986-01-019-1.eps

1. ábra

Az ACD háromszögben $CAD\sphericalangle=30^\circ$ és $DCA\sphericalangle=40^\circ$, ezért az $ADC\sphericalangle=110^\circ$, és így a $P_1DC\sphericalangle=70^\circ$. Ezért $CP_1D\sphericalangle=70^\circ$, és így a CDP_1 háromszög egyenlő szárú, vagyis $CD=CP_1$.

Írjuk föl a szinusztételt az ACD háromszögre! $\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ}$.

A két egyenletből :

$$CP_1=CD=CA\frac{\sin 30^\circ}{\sin 110^\circ}=\frac{CA}{2\sin 110^\circ}=\frac{CA}{2\sin 70^\circ}=\frac{CA}{2\cos 20^\circ}. \tag{1}$$

Az ABC háromszög is egyenlő szárú, ezért $CA=CB$.

Írjuk föl a BCP_2 háromszögre is a szinusztételt! $\dfrac{CP_2}{CB}=\dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}$.

Az utóbbi egyenletből :

$$CP_2=CB\,\frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}=CB\,\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\frac{CB}{2\cos 20^\circ}=\frac{CA}{2\cos 20^\circ}. \tag{2}$$

(1) és (2)-ből pedig $CP_1=CP_2$, és ezt akartuk igazolni.

II. megoldás. Tekintsük az O középpontú $P_1P_2\dots P_{18}$ szabályos 18-szöget (2. ábra). Tükrözzük az OP_{18} sugarat a P_4P_{16} egyenesre ! Ez a tengely a szabályos $P_4P_{10}P_{16}$ háromszög egyik oldala, így O tükörképe P_1 és – P_{18} tükörképét P'_{18}-vel jelölve – $OP_1P'_{18}\sphericalangle=P_1OP_{18}\sphericalangle=20^\circ$. Ez azt is jelenti, hogy a $P_1P'_{18}$ egyenes átmegy P_{12}-n. Másrészt OP_2 és a rá szimmetrikus P_4P_{16}, P_6P_{18} egyenesek is egy ponton, R-en mennek át.

1986-01-020-1.eps

2. ábra

Tekintsük most a $P_{18}P_{12}OR$ négyszöget! Mivel a kerületi és középponti szögek tétele szerint $OP_{18}P_{12}\sphericalangle=30^\circ$, $P_{18}P_{12}Q\sphericalangle=10^\circ$, $P_{18}P_{12}O\sphericalangle=30^\circ$, $P_{18}OR\sphericalangle=40^\circ$ és a P_4P_6R háromszögből $P_{18}RQ\sphericalangle=P_4RP_6\sphericalangle=40^\circ$. Tehát a $P_{18}P_{12}OR$ négyszög hasonló a feladatban szereplő $ABCD$ négyszöghöz, továbbá a P pont megfelelője éppen a Q pont, amely valóban rajta van az QP_{18} átlón. Ebből pedig már következik a feladat állítása.

Kós Géza (Bp. Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Csak kevesen vették észre, hogy a feladat szoros kapcsolatban van *Csirmaz László:* Egy geometriai feladatról c. cikkével (ugyanaz a szám, 1985. április, 147. old.). Feltehetően nem véletlenül. Az az 5 beküldő, aki a cikkben rejlő ötletet felhasználta, eljutott a feladat előbbi igen egyszerű és elegáns megoldásához.