

Vegyünk fel a síkon egy derékszögű koordináta-rendszert és bontuk fel a pozitív síknegyedat az (i, i) ($i = 1, 2, v \dots$) pontokon keresztül a tengelyekkel párhuzamos egyenesekkel egységnyi oldalú négyzetekre. Megadjuk az így kapott rácsnégyzetek kerületének egy színezését úgy, hogy oldalaik különböző színűek legyenek, ezen kívül minden i -re a $(0; 0)$, $(i; 0)$, $(i; i)$, $(0; i)$ csúcú négyzet oldalai egyszínűek és a négy oldal más színű. Ebből következik, hogy a feladatban megadott módon színezett egységnégyzetekből minden n -re összeállítható a megfelelő színű $n \times n$ -es négyzet, így a feladat kérdésére adott válasz mindkét esetben igenlő.

A színezést a megrajzolt rácsegyenesek kifestésével adjuk meg az alábbiak szerint. Az x tengellyel párhuzamos, az $(i; i)$ ponton átmenő rácsegyenes az y tengelytől az $(i; i)$ pontig legyen piros, azon túl pedig sárga színű, ha az i páros; ha pedig az i páratlan, akkor zöld, ill. kék legyen ennek a két résznek a színe.

Az y tengellyel párhuzamos egyeneseket hasonlóan színezzük, csak fölcseréljük a színeket. Páros i -re a szakasz színe legyen zöld, a félegyenesé kék, páratlan i -re pedig a szakasz színe piros, a félegyenesé sárga. Az ábra részein az egyszínű vonalak láthatók, a tengelyeket szaggatott vonallal rajzoltuk meg.

1986-01-018-1.eps

Megmutatjuk, hogy ez a színezés rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. Mivel a kék-sárga és a zöld-piros vonalrendszerek egyaránt tükrös helyzetűek a tengelyek közti szög felezőjére, a $(0; 0)$, $(i; 0)$, $(i; i)$, $(0; i)$ négyzet kerületét egyszínű szakaszok alkotják. Egyikük sárga (az x tengelyre eső oldal), a másikuk kék (az y tengelyre eső oldal), a további kettő pedig piros, illetve zöld; az utóbbi kettő sorrendje attól függ, hogy i páros-e vagy sem.

Vegyünk szemügyre egy rácsnégyzetet. Ennek szemközti oldalai nem lehetnek egyszínűek, hisz az egyállású, egyszínű vonalak távolságai páros számok. Két szomszédos oldal pedig szintén nem lehet ugyanolyan színű, mert semelyik két egyező színű vonalnak nincs közös pontja, így bármely rácspontról különböző színű vonalak lépnek ki. Ez azt jelenti, hogy a rácsnégyzetek oldalai valóban különböző színűek.

Megjegyzés. Az már nem igaz, hogy a fenti színezés során a rácsnégyzetek azonos – tehát forgatással egymásba vihető – módon vannak színezve. Könnyen látható, hogy azonos módon színezett lapocskákkal nem rakható ki 1-nél nagyobb oldalú négyzet.