

Ha  $p$  és  $q$  prímek, akkor  $p^q + q^p > 2$ , így ha ez az összeg maga is prím, akkor páratlan. Az összeg egyik tagja – mondjuk  $p^q$  – így páros, vagyis  $p = 2$ , a másik tag pedig páratlan, vagyis  $q$  is páratlan.

Eszerint azokat a páratlan  $q$  prímszámokat kell megtalálnunk, amelyekre  $2^q + q^2$  prímszám. Tekintsük ennek az összegnek a következő felbontását :

$$2^q + q^2 = (2^q + 1) + (q^2 - 1).$$

A  $q$  páratlan szám, ezért  $2^q + 1$  osztható  $2 + 1 = 3$ -mal. Ha most  $q$  nem osztható 3-mal, akkor a négyzete 1 maradékot ad 3-mal osztva, és így  $q^2 - 1$  szintén osztható 3-mal.

Azt kaptuk, hogy ha  $q$  páratlan, 3-mal nem osztható pozitív egész, akkor  $2^q + q^2$  osztható 3-mal. Tehát prím csak úgy lehet, ha éppen 3, de akkor  $2^q + q^2 = 3$  alapján  $q = 1$  volna, ami nem prímszám.

Így  $q$  osztható 3-mal, vagyis csak  $q = 3$  lehetséges. Behelyettesítve  $2^3 + 3^2 = 17$ , valóban prímszám.

A feladat (egyértelmű) megoldása így  $p = 2$  és  $q = 3$ .