I. megoldás. Mindkét oldalon 4-gyel szorozva, rendezés után a bizonyítandóval ekvivalens

$$2a^2+4ab+2b^2+a+b-4a\sqrt{b}-4b\sqrt{a}\geqq 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

A bal oldalon $4ab=-4ab+4ab+4ab$ felbontás után különbségek négyzetét, pontosabban ilyenek számszorosait ismerhetjük fel. Valóban :

$$\begin{aligned}&2a^2-4ab+2b^2+a(1-4\sqrt{b}+4b)+b(1-4\sqrt{a}+4a)=\\&=2(a-b)^2+a(1-2\sqrt{b})^2+b(1-2\sqrt{a})^2.\end{aligned}$$

A feltétel szerint sem a, sem pedig b nem negatív, így (1) bal oldalán nem negatív mennyiségek összege áll. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. A szóban forgó egyenlőtlenség mindkét oldala szorzattá alakítható, így

$$\left[\frac{1}{2}(a+b)\right]\left(\frac{1}{2}+a+b\right)\geqq\sqrt{ab}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \tag{2}$$

adódik.

A feltétel szerint a tényezők egyike sem negatív, így elegendő megmutatni, hogy a bal oldal „tényezőnként nagyobb” a jobb oldalnál.

Az első tényezők között fennálló

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqq\sqrt{ab}$$

egyenlőtlenség a számtani és mértani közép közti ismert egyenlőtlenség két tagra (a és b nem negatív). Be kell még látnunk, hogy a második tényezők között is hasonló irányú egyenlőtlenség áll fenn, azaz

$$\frac{1}{2}+a+b\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Ez például az első megoldás módszerével igazolható. Rendezés után

$$\left(\frac{1}{2}+a+b\right)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\frac{1}{4}+a-\sqrt{a}+\frac{1}{4}+b-\sqrt{b}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b}\right)^2,$$

ami nem lehet negatív.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból leolvasható, hogy egyenlőség csak az $a=b=\frac{1}{4}$ és az $a=b=0$ esetekben áll fenn.