

Vegyünk fel a síkon egy tetszőleges  $O$  pontot. Az  $O$ -ból az adott pontokba mutató vektorok legyenek  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_9$  valamilyen sorrendben.

Legyen  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  az első,  $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6$  a második és  $\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9$  a harmadik csoportban. Ismert, hogy egy ponthármas súlypontjába mutató vektor az egyes pontokba mutató vektorok számtani közepe. Ezért ha  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  az egyes csoportok súlypontjaiba mutató vektorok, akkor

$$\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3}{3}, \quad \mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6}{3}, \quad \mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_8 + \mathbf{a}_9}{3}.$$

A súlypontok ponthármasára alkalmazva az előző tételt:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3}{3},$$

ahol  $\mathbf{s}$ -sel a 3 súlypont alkotta ponthármas súlypontjába mutató vektort jelöltük az adott csoportosítás mellett.

Mivel a vektorok összeadása kommutatív és asszociatív, ezért bárhogy csoportosítjuk a pontokat,  $\mathbf{s}$  mindig  $\frac{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5 + \mathbf{a}_6 + \mathbf{a}_7 + \mathbf{a}_8 + \mathbf{a}_9}{9}$  lesz. A súlypont helye tehát valóban független a pontok csoportosításától.