Tegyük fel, hogy a megadott átló az AC. Jelölje O a paralelogramma szimmetriaközéppontját. Ekkor a P ponttal együtt a PO félegyenest is adottnak vehetjük.

A PAC háromszög mindhárom oldala ismert, így a PO szakasz, mint e háromszög P-ből induló súlyvonala megszerkeszthető. Ehhez a lépéshez szükséges, hogy a megadott PA, PC, AC szakaszokból létrejöjjön az – esetleg elfajuló – PAC háromszög.

1985-11-392-1.eps

1. ábra

Vigye az O középpontú tükrözés – amelynek során tehát a paralelogramma képe önmaga – a P pontot a P'-be (1. ábra). Ha P és P' egybeesnek – azaz $P=0$, vagyis $PA=PC=AC/2$ –, akkor nyilván szükséges, hogy $PB=PD$ is fennálljon, ilyenkor végtelen sok megoldása van a feladatnak.

Ha $P\neq P'$, akkor a paralelogramma mind a négy csúcsának ismerjük a sík két különböző pontjától – a P-től és a P'-től – mért távolságát, így mind a négy csúcs megszerkeszthető. Akkor létezik megoldás, ha a megadott távolságokkal megszerkeszthetők az – esetleg elfajuló – PXP' háromszögek, ahol X az A, B, C és D csúcsok közül kerülhet ki. Ilyenkor viszont mind a négy pontra – általában – két megoldás adódik, és ezek páronként tükrös helyzetűek a PP' egyenesre. Jelöljük a PP' egyenest a továbbiakban t-vel.

Ha most az (A,A'), (B,B'), (C,C') és (D,D') pontpárok mindegyikéből egymástól függetlenül egy-egy pontot választunk, akkor az így kapott négyszög csúcsai természetesen a megadott távolságokra lesznek a P ponttól. Megszorítást jelent, hogy négyszögünk paralelogramma, másfelől hogy AC átlója megadott hosszúságú.

A szimmetria miatt az A és az A' pontok közül válasszuk az A-t. Ezután a C választása már egyértelmű, ugyanis ha $AC'=AC$, akkor A rajta van t-n, így t épp az AC átló, vagyis ekkor $C=C'$ is fennáll. Ha ezután a (B,B') párból a B-t választjuk, akkor az $ABCD$, ha pedig a B'-t, akkor az $AB'CD'$ négyszög adódik (2. ábra). Ezek a négyszögek paralelogrammák, hiszen szimmetrikusak az O pontra, másfelől bennük a megfelelő távolságok rendre a megadottakkal egyenlők. A két paralelogramma általában nem egybevágó, hisz átlóik egyenlők, az átlók hajlásszöge viszont általában nem.

1985-11-392-2.eps

2. ábra

A $P\neq P'$ esetben tehát feladatunknak általában két különböző megoldása van, amennyiben a korábban említett háromszögek megszerkeszthetők, és a megadott átló végpontjainak az A és a C csúcsokat választjuk. A feladat szövege azonban a paralelogramma „egyik átlójáról” beszél, így az adott hosszúságú átló végpontjainak a betűzés szerint ugyancsak átellenes B és D csúcsokat is választhatjuk. Így az előzőktől általában különböző újabb két megoldást kapunk, a feladatnak tehát valójában négy megoldása van.

Megjegyzés. Könnyen látható, hogy amennyiben az AC átlót tekintjük a megadott hosszúságúnak, akkor az általános esetben – $P\neq P'$ – kapott két megoldás akkor egybevágó, ha az ABC és az $AB'C$ háromszögek egybevágók. Mivel a két háromszög AC oldalegyenese közös, ez a B' pont négy lehetséges helyzetében fordulhat elő (3. ábra).

1985-11-392-3.eps

3. ábra

Az első esetben $B=B'$, tehát B illeszkedik a t egyenesre, amely így azonos a BD átló egyenesével. A megadott távolságokra nézve ez azt jelenti, hogy a szerkesztett PO éppen az adott PB és PD távolságok számtani közepe. Ilyenkor a két megoldás egybeesik.

A második esetben B és B' az AC-re tükrösek, így t azonos az AC átló egyenesével. Erre akkor kerül sor, ha a megadott távolságok közül a PA, PC, AC szakaszokból szerkesztett háromszög elfajuló. Ilyenkor tehát a két megoldás a közös AC átló egyenesére szimmetrikus.

A harmadik esetben B és B' középpontosan szimmetrikus az AC felezőpontjára, O-ra, így $B'=D$, azaz t a BD átló felező merőlegese. Ez akkor teljesül, ha $PB=PD$. Ilyenkor a két megoldás egybeesik, pontosabban az O-ra tükrös helyzetűek.

A negyedik esetben B és B' az AC felező merőlegesére tükrösek, azaz t az AC átló felező merőlegese. Ez akkor teljesül, ha $PA=PC$. Ilyenkor a két megoldás a közös AC átló felező merőlegesére szimmetrikus.