Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a magasságpontot M-mel. Betűzzük a háromszöget úgy, hogy $a \geqq b$ legyen, ekkor $a-b \geqq 0$.

Ha $a-b=0$, akkor a háromszög egyenlő szárú, O és M rajta van az alaphoz tartozó magasságvonalon, ami egyben f_c szögfelező is. A feladat feltételeit tehát bármely, az r sugarú körbe írt egyenlő szárú háromszög kielégíti.

Ha $a-b>0$, akkor M, O és f_c helyzete függ attól, hogy a C szög hegyesszög vagy tompaszög (2. ábra).

1985-11-389-1.eps

1. ábra

1985-11-389-2.eps

2. ábra

Tudjuk, hogy f_c és az AB oldal felező merőlegese a körülírt kört ugyanabban a G pontban metszi. Jelöljük M-ből és O-ból az f_c-re bocsátott merőlegesek talppontját X-szel, Y-nal. A feltétel szerint $MX=OY$. Mivel $MC \perp AB$, és $OG \perp AB$ azért $MCX\sphericalangle = OGY\sphericalangle$, azaz CXM és GYO háromszögek egybevágók, ezért $MC=OG=r$.

Továbbá azt is tudjuk, hogy a magasságpont 2-szer olyan messzire van a háromszög csúcsától, mint a körülírt kör középpontja a csúccsal szemközti oldal felezőpontjától, tehát $r=MC=2\cdot OF$, ahonnan $OF=\frac{r}{2}$. Az AOF derékszögű háromszögben a befogó fele az átfogónak, amiből következik, hogy $AOF\sphericalangle = 60^\circ$, és ezért $AOB\sphericalangle = 120^\circ$. A keresett háromszög C csúcsánál levő szöge tehát vagy 60° vagy 120° aszerint, hogy C az AB húr O-t tartalmazó vagy O-t nem tartalmazó oldalára esik. Az első esetben AB az OG sugár felező merőlegese, a másodikban ennek tükörképe az O középpontra.

Jelölje T a CB oldalon azt a pontot, amelyre $BT=a-b$. Ha $C\sphericalangle = 60^\circ$, akkor ACT szabályos háromszög, tehát $ATB\sphericalangle = 120^\circ$, azaz T az AB fölé írt, O-t tartalmazó 120°-os látókörön van. Ha viszont $C\sphericalangle = 120^\circ$, akkor $ATB\sphericalangle = 150^\circ$, és C az AB húrnak az O-t nem tartalmazó partján van.

Ezek ismeretében könnyen meg tudjuk szerkeszteni a keresett háromszöget. Az r sugarú kör tetszőleges OG sugarának felező merőlegese, illetve annak O-ra vonatkozó tükörképe kimetszi a körből az AB oldalt.

AB fölé 120°, ill. 150°-os látókörívet szerkesztünk az előbb mondottak szerint, a G-t nem tartalmazó partjukon. (Mindkettőnek G a középpontja.) A köríveket B-ből az adott $a-b$ távolsággal elmetszve kapjuk a T pontot, és BT kimetszi a körből a háromszög C csúcsát. Az eddigi meggondolásainkat megfordítva következik, hogy az így kapott háromszögek eleget tesznek a feltételeknek.

1985-11-390-1.eps

3. ábra

A feladatnak akkor van megoldása, ha $a-b$ sugarú körív metszi a látókörívet, azaz $0<a-b<\sqrt{3}r$, és ekkor (egybevágóság erejéig) 2 különböző megoldást kapunk.

Megjegyzés. A 4 pontos dolgozatok szerzői csak azt a háromszöget találták meg, amelyben $C\sphericalangle = 60^\circ$.