I. megoldás. Jelöljük a háromszög csúcsait A, B és C-vel, a súlypontot S-sel!

1986-04-165-1.eps

1. ábra

Tekintsük az S-en átmenő, BC-vel párhuzamos egyenest! Metszéspontját az AB és AC oldallal jelöljük B', ill. C'-vel. Így az ABC háromszöget felosztottuk az $AB'C'$ háromszögre és a $BB'C'C$ négyszögre. Mivel a BC egyenes párhuzamos a $B'C'$ egyenessel, ezért az ABC háromszög hasonló az $AB'C'$ háromszöghöz, és $A'B' = \frac{2}{3}AB$ miatt az $AB'C'$ háromszög területe az ABC háromszög területének $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$-szerese. Ezért az $AB'C'$ háromszög és a $BB'C'C$ négyszög területének aránya

$$\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{4}{5}.$$

Nyilván akkor is ennyi lesz a területek aránya, ha e AB-vel vagy AC-vel párhuzamos.

Tudjuk azt is, hogy ha e átmegy a háromszög valamelyik csúcsán, akkor a két rész területe egyenlő.

Ezekből, és az A, B, C csúcsok szerepének szimmetrikus voltából következik, hogy elegendő a kérdést abban az esetben megvizsgálnunk, amikor e-nek az AB ill. AC oldallal alkotott B_1, ill. C_1 metszéspontja a $B'B$ ill. $C'A$ szakasz belső pontja (1. ábra).

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egységet úgy választottuk meg, hogy az ABC háromszög területe 1.

B' a B_1A szakasz belső pontja, ezért B_1 távolabb van AS-től, mint B', és hasonlóan, C_1 közelebb van AS-hez, mint C'. Ezekből és abból, hogy $B'S = SC'$, következik, hogy $B_1S > SC_1$.

A $B_1B'S$ és a $C_1C'S$ háromszögekben $B'S = SC'$, továbbá $B'SB_1\sphericalangle = C'SC_1\sphericalangle$, és mivel $B_1S > SC_1$, a $B_1B'S$ háromszög területe nagyobb a $C_1C'S$ háromszög területénél. Ez azt jelenti, hogy

$$T_{AB_1C_1} > T_{AB'C'} = \frac{4}{9}.$$

Az ábráról viszont az is leolvasható, hogy

$$T_{AB_1C_1} < T_{AB'C'} + T_{BB'S}.$$

Mivel $T_{SAB} = \frac{1}{3}$, és B' harmadolja AB-t,

$$T_{BB'S} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Ennélfogva:

$$T_{AB_1C_1} < \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\frac{4}{9} < T_{AB_1C_1} < \frac{5}{9},$$

vagyis az e egyenes a háromszöget mindig két olyan részre vágja, amelyek területének aránya nem nagyobb $\frac{5}{4}$-nél és nem kisebb $\frac{4}{5}$-nél. Egyenlőség pedig pontosan akkor áll fenn, ha az e egyenes párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával.

II. megoldás. Harmadoljuk az ABC háromszög oldalait, majd az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel kössük össze a megfelelő harmadolópontokat (2. ábra). Így 9 egybevágó kis háromszögre osztottuk az ABC háromszöget. Ha a súlyponton áthaladó e egyenes párhuzamos a háromszög valamelyik oldalával, akkor egyik partján 4, a másikon pedig 5 kis háromszög található, a részek aránya így $4/5$.

1986-04-165-2.eps

2. ábra

Ha e nem párhuzamos az ABC háromszög egyik oldalával sem, akkor pontosan 3 db kis háromszögbe metsz bele, továbbá mindkét partján 3–3 db teljes kis háromszög található. Az a két kettévágott kis háromszög, amelyik közös csúcsa az ABC háromszög súlypontja, összesen 4 olyan darabra esik szét, amelyek közül 2–2 nyilván egybevágó. (Lásd az ábrát!)

Ebből következik, hogy e mindkét oldalára még egy kisháromszögnyi terület kerül, így összesen már 4–4 kisháromszögnyi terület van mind a két oldalon. Így bármelyik rész területe legalább akkora, mint az ABC háromszög területének $\frac{4}{9}$-része. Mivel pedig e még egy kis háromszöget kettévág, mindkét rész területe nagyobb ennél.

Ezzel beláttuk, hogy a két terület aránya mindig $\frac{4}{5}$ és $\frac{5}{4}$ közé esik, és hogy pontosan akkor van egyenlőség, ha e párhuzamos a háromszög egyik oldalával.