

Mivel  $\frac{1}{5^n} = 2^n \cdot \frac{1}{10^n}$ , azért  $\frac{1}{5^n}$  és  $2^n$  jegyeinek összege megegyezik, hiszen 10 hatványaival osztva csak a tizedesvessző helye, illetve a 0 számjegyek száma változik. A továbbiakban tehát 2-nek azt a természetes kitevőjű hatványát keressük, amelyben a számjegyek összege 5.

Az  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  eseteket megvizsgálva látható, hogy  $2^5 = 32$  esetén a jegyek összege éppen 5. Azt állítjuk, hogy ha  $n > 5$ , akkor  $2^n$  jegyeinek összege nem lehet 5, vagyis az egyetlen megoldás  $n = 5$ .

Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és így van olyan  $n > 5$  természetes szám, amelyre  $2^n$  jegyeinek összege 5. Ekkor minden jegye legfeljebb 4 ( $2^n$  legalább kétjegyű), maga a szám pedig páros, és nem osztható 10-zel, utolsó jegye tehát 2 vagy pedig 4.

Ha 4 volna az utolsó számjegy, akkor a legelső jegy 1, valamennyi további közbülső számjegy pedig 0. Ha  $n > 5$ , akkor  $2^n$  osztható 8-cal – 64-gyel is –, tehát az utolsó 3 jegyből alkotott szám is a 8 többszöröse. A fentiek szerint ez a szám 4, 14 vagy 104, ezek közül pedig a 104 az egyetlen 8-cal osztható. Így maga a 104 lehetne csak a szóban forgó 2-hatvány, de a 104 nem az.

Ha az utolsó jegy 2, akkor – mivel  $2^n$  osztható 4-gyel – az utolsó két jegyből alkotott szám is ilyen. Az utolsó előtti jegy ezért 3 vagy 1. Előbbi esetben a már ismert 32 adódik. Ha az utolsó előtti jegy 1, akkor ezt páratlan jegy előzi meg, mert az utolsó 3 jegyből alkotott szám csak így lehet 8-cal osztható. A jegyek összege viszont 5, így az utolsó három jegy 112.

Hasonlóan továbbmenve, abból, hogy az utolsó négy jegyből álló szám 16-tal, az utolsó ötből álló pedig 32-vel osztható, kapjuk, hogy a hátulról számított negyedik és ötödik számjegy szükségképpen 0, illetve 1. A jegyek összege eddig 5, de az így kapott 10112 nem 2-hatvány.

Beláttuk tehát, hogy csak  $n = 5$  esetén lesz  $1/5^n$  tizedestört alakjában a jegyek összege 5.