I. megoldás. A kerületi szögek tételének irányított szögekkel való megfogalmazását és annak megfordítását fogjuk használni (vö. Gy. 2219.megoldását).[1] Válasszuk úgy a betűzést, hogy az ABC háromszög pozitív körüljárású legyen, a háromszög α, β, γ szögeit pedig tekintsük pozitív irányú forgásszögeknek.

1985-12-454-1.eps

1. ábra

Az AB_1C_1 háromszög köré írt körének tetszőleges P pontjára a PC_1 egyenest ugyanakkora forgás viszi át a PB_1 egyenesbe, mint az AC_1-et AB_1-be, ez a szög pedig jelöléseink szerint α. Hasonlóan a BA_1C_1 háromszög köré írt kör egy P' pontjára $P'A_1$-et $P'C_1$-be β szögű forgatás viszi. Legyen M e két körülírt kör második, C_1-től különböző metszéspontja; MA_1 egyenest MC_1-be β szögű, MC_1-et MB_1-be α szögű elforgatás viszi át. Ha most MB_1-et tovább forgatjuk γ szöggel, akkor $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ miatt MA_1-et összesen 180°-kal forgattuk el, vagyis visszajutottunk MA_1-be. Ezért MB_1-et M körül γ szöggel elforgatva MA_1-et kapjuk, ami azt jelenti, hogy M rajta van a CA_1B_1 háromszög körülírt körén. Valóban, CB_1-et C körül γ szöggel forgatva CA_1-hez jutunk; és a kerületi szögek tételének megfordítása szerint ekkor mindazok a pontok rajta vannak CA_1B_1 körülírt körén, amelyekre ez a forgásszög, és az M pont ilyen.

Ezzel igazoltuk, hogy az AB_1C_1, BC_1A_1 és CA_1B_1 háromszögek körülírt körei egy M ponton mennek át, továbbá e körök középpontjait összekötő egyenesek rendre merőlegesek a közös húrokat tartalmazó MA_1, MB_1, MC_1 egyenesekre. A középpontokat összekötő egyenesek szögei megegyeznek a rájuk k merőleges MA_1, MB_1, MC_1 egyenesek által bezárt szögekkel, ez utóbbiak szögei pedig – mint láttuk – α, β és γ. Így a középpontokat összekötő egyenesek páronként α, β, γ szöget zárnak be; a kérdéses háromszög valóban hasonló az ABC háromszöghöz, amint azt bizonyítanunk kellett.

II. megoldás. Húzzuk meg az ABC háromszög oldalain adódó szakaszok felező merőlegeseit – ezeknek a 2. ábra szerinti D, E, F metszéspontjai adják meg a körülírt körök középpontjait.

1985-12-454-2.eps

2. ábra

Az egy oldalra merőleges két egyenes távolsága az oldal hosszának fele, ezért elegendő a következőt igazolnunk:

Az ABC háromszög mindhárom oldalára két-két merőlegest állítunk úgy, hogy a párhuzamosak távolsága a megfelelő oldal hosszának fele legyen. Ekkor a D, E, F metszéspontok az ABC-hez hasonló háromszöget határoznak meg.

Rögzítsük a BC, CA oldalakra emelt merőlegeseket, és vizsgáljuk, hogyan változik a DEF háromszög, mikor a harmadik párhuzamos párt csúsztatjuk AB-n. Az F pont fixen marad, D és E pedig AC-re, illetve BC-re merőlegesen mozog.

Húzzunk F-ből párhuzamost az AC, BC oldalakkal, messék ezek az oldalra emelt másik merőlegeseket D'-ben, E'-ben. A $D'E'F$ háromszög $D'F$ és FE' oldala párhuzamos és fele akkora, mint az ABC háromszög megfelelő oldala – így ez áll a harmadik, $D'E'$ oldalra is : $D'E' \parallel AB$ és $D'E'=AB/2$.

Forgassuk és nyújtsuk meg a $D'E'F$ háromszöget F körül úgy, hogy az E' pont E-be kerüljön, legyen D' képe D^*. A dőlt betűs állítást – és ezzel együtt a feladat állítását is – beláttuk, ha megmutatjuk, hogy D és D^* egybeesik. Ehhez meg elegendő azt látnunk, hogy egyrészt D^* rajta van a DD' egyenesen, másrészt D^*E-nek AB-re való vetülete éppen $AB/2$ hosszúságú.

Az első állítás könnyen adódik. A forgatva nyújtás miatt az $FE'E$ és $FD'D^*$ háromszögek hasonlók – speciálisan mindkettő derékszögű, és így $FD'D^*\sphericalangle = FD'D\sphericalangle = 90^\circ$, tehát D', D és D^* valóban egy egyenesen vannak.

D^*-ból húzzunk párhuzamost $D'E'$-vel, és mérjük fel rá a $D^*E^*=D'E'$ szakaszt. Ez akkora szöget zár be D^*E-vel, amekkorával a $D'E'F$ háromszöget elforgattuk, vagyis például $ED^*E^*\sphericalangle = EFE'\sphericalangle$. Másrészt $D'E'F$ és D^*EF hasonlóságából

$$D^*E : D^*E^* = D^*E : D'E' = EF : E'F,$$

tehát EPE' és ED^*E^* hasonló derékszögű háromszögek. Ráadásul $D^*E^* \parallel AB$, ezért D^*E-nek AB-re való merőleges vetületének hossza $D^*E^*=D'E'=AB/2$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Második megoldásunkban nem használtuk ki, hogy a párhuzamos egyenespárok metszik az oldalszakaszokat, és azt sem, hogy távolságuk a megfelelő oldal hosszának éppen a fele, hanem csak annyit, hogy ez az arány mindhárom esetben ugyanaz.

[1] Lásd ezen számban a 452. oldalon.