Az E pontja az AC szakasznak, ezért $CE = n \leq AC = 21$, továbbá az, (esetleg elfajuló) egyenlő szárú ADE háromszögből $AD + DE \geq AE$, azaz $n \geq 7$.

Ha most $n = 21$, akkor E és A egybeesik, D az AB szakasznak az a pontja, amire $AD = 21$, és $BC = m$ tetszőleges olyan egész szám lehet, amelyre az ABC háromszög létrejön. Így n egyik lehetséges értéke 21.

1985-05-213-1.eps

Ha $n = 7$, akkor E az AC szakasz C-hez közelebbi harmadolópontja. Az egyetlen olyan pont, ami A-tól és E-től egyaránt $n = 7$ távolságra van, AE felezőpontja. Ezért D szükségképpen ezzel a ponttal esik egybe, de akkor nem lehet rajta az ABC háromszög AB oldalán is. Így $n \neq 7$, vagyis $n > 7$.

A megmaradt $7 < n < 21$ esetekben ADE valódi egyenlő szárú háromszög. Legyen B-nek, D-nek merőleges vetülete AC-re B', D'. Ekkor $AD' = AE/2 = = (21-n)/2$. Az $AD'D$ és $AB'B$ hasonló derékszögű háromszögek, hasonlóságuk aránya $AB : AD = 33 : n$, így

$$AB' = AD' \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{21-n}{2} \cdot \frac{33}{n}. \tag{1}$$

Most B' akár az AC oldalra, akár annak C-n túli meghosszabbítására esik, mindenképpen $CB' = |AC - AB'|$. Az $AB'B$ és $CB'B$ derékszögű háromszögekre a Pitagorasz tétel szerint

$$AB^2 - AB'^2 = BB'^2 = BC^2 - CB'^2.$$

Az $AB = 33$, $BC = m$ és $CB' = |21 - AB'|$ értékeket helyettesítve

$$33^2 - AB'^2 = m^2 - 21^2 + 2 \cdot 21 \cdot AB' - AB'^2,$$

ahonnan (1) szerint – mindjárt rendezve –

$$n(2223 - m^2) = 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11.$$

A bal oldal második tényezője egész, így n osztója a jobb oldalnak. Tudjuk azt is, hogy $7 < n < 21$, így az n-re szóba jövő értékek $n = 9$ és $n = 11$. Az első esetben $m^2 = 2223 - 3 \cdot 7^2 \cdot 11 = 606$, vagyis m-re nem adódik egész érték. Ha viszont $n = 11$, akkor $m^2 = 2223 - 3^3 \cdot 7^2 = 900$, vagyis $m = 30$.

Így a fenti $n = 21$ érték mellett egyedül $n = 11$ jöhet szóba. Ellenőriznünk kell még, hogy abban az ABC háromszögben, amelyre $BC = m = 30$ egység, valóban találhatók-e megfelelő D és E pontok. A fenti meggondolás lépéseit fordított sorrendben alkalmazva ez könnyen adódik, így nem részletezzük.

Összefoglalva tehát: a feladat kérdezett n lehetséges értékei 11 és 21.