C_1O és C_2C_5 merőlegességéből következik, hogy $C_1C_2 = C_1C_5$, továbbá a tükrözésekből $C_1C_2 = C_2C_3$, ill. $C_1C_5 = C_5C_4$, amiből a $C_1C_2 = C_2C_3 = C_1C_5 = C_5C_4$ húrok egyenlősége következik (1. ábra).

1985-11-385-1.eps

1. ábra

Elegendő azt igazolnunk, hogy $C_1OC_2\sphericalangle = 72^\circ$, mert ebből már következik, hogy O-ból a kérdéses ötszög hátralevő C_3C_4 oldala is 72°-os szögben látható.

Legyen a kör sugara egységnyi, ekkor $OC_1 = 1$, $OD = \frac{1}{2}$, és a Pitagorasz-tétel alapján $DC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Az ODC_1 háromszögre felírhatjuk a szögfelező tételt:

$$OD : DC_1 = OE : EC_1, \quad \text{azaz}$$
$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2} = OE : (1 - OE).$$

Innen

$$OE = \frac{1}{\sqrt{5}+1}.$$

Jelöljük a C_2OE szöget α-val, ekkor az OEC_2 derékszögű háromszögben

$$\cos\alpha = OE = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

1985-11-385-2.eps

2. ábra

Most már csak azt kell látnunk, hogy $\alpha = 72^\circ$. Rajzoljunk egy egyenlő szárú háromszöget, amelyben $AB = AC = 1$, és $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 72^\circ$ (2. ábra). Legyen $BC = x$. Húzzuk meg a B-nél levő 72°-os szög szögfelezőjét, ez a szemközti AC oldalt messe a D pontban. A BCD és BDA háromszögek egyenlőszárúak, mert 2-2 szögük egyenlő, így $DA = BD = BC = x$, $CD = 1 - x$. Továbbá BCD és ABC hasonló háromszögek. Ezekből

$$1 : x = x : (1 - x).$$

Az x -re kapott $x^2 + x - 1 = 0$ másodfokú egyenletből $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Mivel most tudjuk, hogy $x > 0$, csak a pozitív gyököt kell figyelembe vennünk, azaz $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ekkor pedig az ABC háromszögben $\cos 72^\circ = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, s ezt akartuk bizonyítani.