(Az F. 2494. megoldása is.) Általában, $n \geq 2$ golyó esetén válaszoljuk meg a feladat kérdését. A nyereség helyett vizsgáljuk a veszteséget! Ez a mérések, valamint a radioaktívvá vált golyók számának az összege. Feladatunk megkeresni: mi a lehető legkisebb veszteség.

Jelölje H_k az első k darab pozitív egész összegét, azaz legyen $H_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, az úgynevezett k-adik „háromszögszám". Állítjuk, hogy ha $n \leq H_k + 1$, akkor van olyan mérési eljárás, amelynek során legfeljebb $k+1$ forintot veszítünk, míg ha $n > H_k + 1$, akkor bármilyen módszerrel próbálkozzunk is, ennek során előfordulhat, hogy veszteségünk legalább $k+2$ forint.

Legyen tehát először $n \leq H_k + 1 = k + (k-1) + (k-2) + \ldots + 2 + 2$. Ekkor léteznek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ nem negatív egészek, hogy

$$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + 2, \tag{1}$$

továbbá

$$a_1 \leq k, \qquad a_2 \leq k-1, \ \ldots, \ a_{k-1} \leq 2.$$

Valóban, ha $n = H_k + 1$, akkor az

$$n = k + (k-1) + \ldots + 2 + 2$$

választás megfelelő, ha pedig $n < H_k + 1$, akkor egyes a_i-ket alkalmasan csökkentve elérhető az előállítás.

Osszuk ezután a golyókat (1) szerint k csoportba úgy, hogy az egyes csoportokban rendre $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_{k-1}$, illetve az utolsóban 2 darab golyó legyen. Mérjük meg ebben a sorrendben először az a_1 darab, majd az a_2 darab golyót, és így tovább egészen addig, amíg egy „sugárzó" csoportra nem találunk, illetve ha a $(k-1)$-edik csoport is „egészséges" volt, akkor itt hagyjuk abba – tehát a maradék 2 golyóval ne törődjünk.

Ha az i-edik mérésre találjuk meg a sugárzó golyót ($i \leqq k-1$), akkor veszteségünk $i + a_i$ forint, ami $a_i \leq k - (i-1)$ szerint legfeljebb $k+1$. Ha pedig a $k-1$ darab mérés során nem találtunk sugárzó golyót, akkor veszteségünk az elvégzett mérések költsége és a megmaradt 2 golyó, de ez most sem több $k+1$ forintnál. Ezzel állításunk első felét igazoltuk.

Legyen most $n > H_k + 1$ és tegyük fel, hogy létezik olyan mérési eljárás, amelynek során a veszteség legfeljebb $k+1$ forint, bármilyen is legyen a golyók sorrendje mérés közben.

Ha az i-edik mérés során a_i darab golyót mérünk egyszerre, akkor nyilván $a_i + 2 \leq (k+1)$-nek fenn kell állnia, hiszen ha véletlenül éppen ezek között van a radioaktív golyó, akkor ezzel a méréssel együtt $a_i + i$ forint a veszteségünk. (Azt a lehetőséget nyilván kizárhatjuk, amikor valamennyi mért golyóról tudjuk, hogy egészséges, hiszen ilyen mérést nem végzünk.)

Ez azt jelenti, hogy $l \leq k$-ra l méréssel legfeljebb $k + (k-1) + \ldots + (k-l+1)$ golyót vizsgálhatunk át. Így a még nem mért golyók száma legalább

$$\begin{aligned} n - \big(k + (k-1) + \ldots + (k-l+1)\big) &\geq H_k + 2 - \big(k + (k-1) + \ldots + (k-l+1)\big) = \\ &= 2 + (k-l) + (k-l-1) + \ldots + 1 \geq 2 + (k-1). \end{aligned}$$

Az i-edik mérés után még legalább $(k-l)+2$ golyót nem vizsgáltunk meg. Ha eddig valamennyi golyó egészséges volt és abbahagyjuk a mérést, veszteségünk legalább $l + (k-l) + 2 = k+2$ forint. Ha viszont $(k+1)$-edszer is mérünk, és éppen akkor találunk sugárzó golyót (golyókat), a veszteség ismét legalább $k+2$ forint.

Beláttuk tehát, hogy $n > H_k + 1$ esetén bárhogyan is próbálkozunk, előfordulhat, hogy veszteségünk (balszerencsés esetben) legalább $(k+2)$ forint.

Ha tehát H_k jelöli az $(n-1)$-nél nem nagyobb háromszögszámok legkisebbikét, akkor mindenképpen biztosíthatjuk, hogy $k+1$ forint legyen a veszteségünk, ennél kevesebbet azonban már nem. Így az üzleten legfeljebb $n-k-1$ forintot nyerhetünk biztosan. Mivel $H_3 = 6, \ H_4 = 10$, azért $n = 10$-re $k = 4$, azaz legfeljebb $10 - (4+1) = 5$ forintot nyerhetünk, a megoldás első része alapján például a következő csoportosítással: $a_1 = 3, \ a_2 = 3, \ a_3 = 2, \ a_4 = 2$.

Ha $n = 100$, akkor $H_{13} = 91, \ H_{14} = 105$ alapján $k = 14$, így legfeljebb $100 - (14+1) = 85$ forint nyereséggel számolhatunk biztosan. Egy lehetséges méréssorozat:

$$a_1 = 14, \quad a_2 = 13, \ \ldots, \ a_{10} = 5, \quad a_{11} = 3, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 0, \quad a_{14} = 2.$$

Megjegyzések. 1. Némi számolás után adódik, hogy n darab golyó esetén az elérhető nyereség

$$\left[\frac{2n - 1 - \sqrt{8n-7}}{2}\right] \text{ forint.}$$

2. A megoldásban azt kerestük, mennyi az a nyereség, amit a „legrosszabb" esetben is megszerezhetünk. Azt is vizsgálhatnánk, hogy mi a maximális nyeremény *várható értéke*. A kérdés nem könnyű, itt csak egy példán szemléltetjük, miről van szó.

A mérést úgy végezzük, hogy a golyókat $a_1, a_2, \ldots, a_k$ méretű kupacokra vágjuk szét, majd sorban az a_1, a_2 stb. méretű kupacot küldjük el megmérni (az utolsó kivételével). Ha a radioaktív golyó az i-edik kupacban van – ennek valószínűsége a_i/n –, veszteségünk $a_i + i$. Így a veszteség várható értéke

$$\frac{a_1}{n}(1 + a_1) + \frac{a_2}{n}(2 + a_2) + \ldots + \frac{a_{k-1}}{n}(k - 1 + a_{k-1}) + \frac{a_k}{n}(k - 1 + a_k).$$

100 golyónak a megoldásban ismertetett csoportosítására ez az érték

$$\frac{14}{100}(14+1)+\frac{13}{100}(13+2)+\ldots+\frac{5}{100}(5+10)+$$
$$+\frac{3}{100}(3+11)+\frac{2}{100}(2+11)=14{,}93,$$

vagyis a veszteség várható értéke valamivel kevesebb, mint 15, ami természetes, hisz az esetek két századrészében már 11 mérés után kiderül, hogy a megmaradt golyók között van a sugárzó.

Az egyik optimális csoportosítás az alábbi:

$$a_1=10,\ a_2=a_3=9,\ a_4=a_5=8,\ a_6=a_7=7,\ a_8=a_9=6,\ a_{10}=a_{11}=5,$$
$$a_{12}=a_{13}=4,\ a_{14}=a_{15}=3,\ a_{16}=a_{17}=a_{18}=2.$$

Ebben az esetben ugyan előfordulhat, hogy a veszteségünk több lesz 15 forintnál, azonban ennek a valószínűsége kicsi. Ha viszont az első 7 mérés valamelyikében akadunk a sugárzó golyóra, akkor a veszteség csak 13 vagy 14 forint, tehát érdemes kockáztatni. Maga a várható érték ebben az esetben 13,84 forint, azaz ilyenkor átlagosan körülbelül 1 forinttal nyerhetünk többet, mint az előbb.