Az f függvényről tudjuk, hogy minden x, y egész számra

$$f(x-y^2)=f(x)+(y^2-2x)\cdot f(y). \tag{1}$$

Határozzuk meg f (1984) értékét.

Megoldás. Ha $y=1$, akkor (1) szerint minden x egészre

$$f(x-1)=f(x)+(1-2x)\cdot f(1). \tag{2}$$

Írjuk (2)-ben x helyére a pozitív egész számokat 1-től n-ig:

$$f(0)=f(1)-f(1), \tag{3}$$
$$f(1)=f(2)-3\cdot f(1), \tag{4}$$
$$\vdots$$
$$f(n-1)=f(n)-(2n-1)\cdot f(1). \tag{5}$$

Ezeket összeadva az $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n-1)$ értékek mindkét oldalon szerepelnek, így rendezés után kapjuk, hogy

$$f(0)=f(n)-S_n\cdot f(1),$$

ahol S_n az első n darab pozitív páratlan szám összege. Ismeretes, hogy $S_n=n^2$, másrészt (3) szerint $f(0)=0$, így ha n pozitív egész, akkor

$$f(n)=f(1)\cdot n^2, \tag{6}$$

Ennél többet azonban nem mondhatunk. Legyen ugyanis a tetszőleges valós szám, és tekintsük az $f(x)=a\cdot x^2$ függvényt. Itt $f(1)=a$. Másfelől

$$f(x)+(y^2-2x)\cdot f(y)=ax^2+(y^2-2x)ay^2=a(x^2+y^4-2xy^2)=a(x-y^2)^2,$$

ami nem más, mint $f(x-y^2)$. Így ha $f(x)=ax^2$, akkor f-re teljesül (1), vagyis $f(1)$-re semmi nem következik abból, hogy f-re teljesül (1).

Így $f(1984)$ értéke tetszőleges lehet, hiszen minden A valós számra van olyan f, amelyre teljesül (1) és $f(1984)=A$, mégpedig $f(x)=\dfrac{A}{1984^2}x^2$.