

Legyen az ABC háromszög kiválasztott csúcsa A , és mossa az egyenes a BC oldalt P -ben. Az ABC , ABP , ACP háromszögek köré írt körök középpontja legyen rendre O , O_1 , O_2 . Azt kell igazolnunk, hogy ez a három pont és A egy körre esik. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az AO_1OO_2 négyszögről megmutatjuk: húrnégyszög, vagyis szemközti szögeinek összege 180° . Ekkor azonban kell tudnunk, hogy ezek a pontok milyen sorrendben alkotnak négyszöget, ami az ABC háromszög és a P pont helyzetének részletes elemzését kívánná – és nem is biztos, hogy minden eset eszünkbe jutna. Ezért olyan feltételt keresünk, ami a pontok elhelyezkedésére való tekintet nélkül biztosítja, hogy egy körre esnek.

1985-12-452-1.eps

1. ábra

Legyen X és Y egy kör két pontja. A kerületi szögek tételét úgy fogalmazhatjuk, hogy a kör tetszőleges P pontjára a PX egyenest a PY egyenesbe vivő pozitív irányú forgásszög ugyanakkora (1. ábra), és ez fele annak, ami az OX egyenest- OY -ba viszi. Ez megfordítva is igaz: ha a sík tetszőleges Q pontjára a QX egyenest ugyanakkora (pozitív irányú) forgás viszi a QY egyenesbe, mint a kör valamely P pontjára PX -et PY -ba, akkor Q szükségképpen a körön van.

1985-12-453-1.eps

2. ábra

Vigye a pozitív irányú α szögű forgatás a PA egyenest PB -be (2. ábra). Mivel az A , B , P pontok az O_1 középpontú körön vannak, azért az O_1A egyenest 2α szögű elforgatás viszi O_1B -be. Így O_1A -t α szöggel elfordítva éppen AB felező merőlegesét kapjuk. Ám ezen az egyenesen rajta van az ABC háromszög körülírt körének O középpontja is – tehát O_1A -t O_1 körül α szöggel elforgatva az O_1O egyenest kapjuk.

Hasonlóan adódik az O_2 középpontú, A , P és C pontokat tartalmazó körre, hogy O_2A -t O_2 körül α szöggel elfordítva AC felező merőlegesét, vagyis az O_2O egyenest kapjuk.

A kerületi szögek tételének fentebb idézett megfordítását alkalmazzuk arra a körre, amelynek húrja AO , egy pontja pedig O_1 . Mivel O_1A -t ugyanakkora szögű elforgatás viszi O_1O -ba, mint O_2A -t O_2O -ba, azért O_2 valóban pontja ennek a körnek, amit igazolni akartunk.

Megjegyzés. A megoldásban nem használtuk ki, hogy P pontja a BC szakasznak, így az állítás akkor is érvényes, ha P -t a BC egyenesen bárhol vesszük fel.