Szorozzuk meg (1)-ben mindkét oldalt $ab(pa+qb)$-vel:

$$pb(pa+qb)+qa(pa+qb)=ab,$$

ahonnan átrendezés után

$$pq(b^2+a^2)+ab(p^2+q^2-1)=0. \tag{2}$$

A feltételek szerint $p+q=1$, ahonnan $p^2+q^2+2pq=1$, így ha (2)-ben p^2+q^2-1 helyére a vele egyenlő $(-2pq)$-t írjuk, akkor

$$pq(b^2+a^2)-ab\,2pq=0$$

adódik. pq-t kiemelve

$$pq(b^2+a^2-2ab)=pq(a-b)^2=0.$$

A feltétel szerint a fenti szorzat első tényezője nem nulla, így $(a-b)^2=0$, tehát $a=b$, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Ha $f(x)=\dfrac{1}{x}$, akkor az állítás azt mondja ki, hogy $p+q=1$ és $pq\neq 0$ mellett $p\cdot f(a)+q\cdot f(b)=f(pa+qb)$ esetén $a=b$. Ismert, hogy ha $a\neq b$, akkor amennyiben $p+q=1$, akkor az $E\big(pa+qb; f(pa+qb)\big)$ pont az f grafikonjának, az $F\big(pa+qb; p\cdot f(a)+q\cdot f(b)\big)$ pont pedig az $A\big(a; f(a)\big)$ és a $B\big(b; f(b)\big)$ pontokon átmenő egyenesnek az A, illetve a B pontoktól különböző pontjai.

1985-04-166-1.eps

Mivel E és F abszcisszája egyenlő, a bizonyítandó állítás épp azt jelenti, hogy az f grafikonjának különböző A és B pontjain átmenő egyenesen nincs további görbepont, vagyis f grafikonját minden egyenes legfeljebb két pontban metszi.