Legyen P-nek a k kör O középpontjára vonatkozó tükörképe S. A kör szimmetriája miatt nyilván elegendő azokat a húrokat vizsgálni, amelyeknek P-től különböző R végpontjuk – mondjuk – a jobb oldali a PS félköríven van. Vegyünk fel egy ilyen húrt. Szerkesszük meg fölé a PQR egyenlő szárú derékszögű háromszöget. Ha Q a nagyobbik PR ívhez tartozó körszeletbe esik, akkor mivel $PQR\sphericalangle = 90^\circ$ és PR a nagyobbik körív pontjaiból hegyesszög alatt látszik, Q biztosan a k kör belsejében van. Ha viszont Q a rövidebb ív felé esik, akkor – mivel PR az ív pontjaiból tompaszög alatt látszik – Q biztosan a körön kívülre esik. Mi most csak ezen Q pontok halmazát vizsgáljuk.

1985-10-305-1.eps

A PS átmérő fölé írt egyenlő szárú háromszög derékszögű csúcsa éppen a PS ív M felezőpontja. M-hez úgy is eljuthatunk, ha S pontot P körül 45°-os szöggel (az óramutató járásával ellentétes irányban) elforgatjuk és $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szörösére kicsinyítjük. Általában is ez a helyzet a PS ív bármely R pontjára, azaz ha a PR húrt 45°-kal elforgatjuk és $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szörösére kicsinyítjük, az így kapott Q pont éppen a PR fölé írt egyenlő szárú derékszögű háromszög harmadik csúcsát adja.

Valóban, $PRQ\sphericalangle = 45^\circ$ és $\frac{PQ}{PR} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ miatt PQR éppen egy négyzet fele. Amíg R végigfut PS Thalész-körének jobb oldali félkörívén, a PR fölé írt egyenlő szárú derékszögű háromszögek derékszögű csúcsa a PM átmérőjű Thalész-körből a k körön kívül eső k_1 félkört írja le. És fordítva, ha a k_1 íven felveszünk egy Q pontot, ehhez mindig található egy PQR egyenlő szárú derékszögű háromszög, ahol R a k kör pontja. Az R pontot a transzformáció „megfordításával” kaphatjuk meg: PQ-t P körül 45°-kal elforgatjuk, és $\sqrt{2}$-szeresére nagyítjuk.

A keresett pontok halmaza tehát a PM fölé írt Thalész-félkörív és annak a PS átmérőre vonatkozó tükörképe. P és M természetesen nem tartozik a halmazba.