I. megoldás. Feltehetjük, hogy a pontok a félkörön az A, C, M, D, B sorrendben követik egymást. Megállapítjuk, hogy M minden megengedett helyzetében S és T a CD szakasz belső vagy határpontjai (ha M egybeesik C-vel vagy D-vel), és hogy e pontok sorrendje C, S, T és D.

1985-03-116-2.eps

1. ábra

Vetítsük a CD egyenesre merőlegesen az A és B pontokat, a talppontok legyenek A_1, illetve B_1. Mivel $ACD\sphericalangle > ACB\sphericalangle = 90^\circ$, azért A_1 a CD szakasz C-n túli meghosszabbításába esik, s hasonlóan B_1 ugyanennek a D-n túli meghosszabbítására.

Állítjuk, hogy az A_1S és TB_1 szakaszok hosszának szorzata nem függ az M pont helyzetétől. Valóban, AA_1S és BB_1T derékszögű háromszögek, és S-nél, illetve T-nél levő szögeik megegyeznek az STM M-ben derékszögű háromszög egy-egy hegyesszögével. Így

$A_1SA\sphericalangle = MST\sphericalangle = 90^\circ - MTS\sphericalangle = 90^\circ - B_1TB\sphericalangle = TBB_1\sphericalangle$, azaz AA_1S és TB_1B hasonló háromszögek:

$$\frac{AA_1}{A_1S} = \frac{ZB_1}{BB_1},$$

ahonnan $A_1S \cdot TB_1 = AA_1 \cdot BB_1$, valóban független M helyzetétől. A számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből

$$ST = A_1B_1 - (A_1S + TB_1) \le A_1B_1 - 2\sqrt{A_1S \cdot TB_1} = A_1B_1 - 2\sqrt{AA_1 \cdot BB_1}. \tag{1}$$

Ezek szerint az ST szakasz hossza legfeljebb $A_1B_1 - 2\sqrt{AA_1 \cdot BB_1}$, és ennyi is csak akkor lehet, ha $A_1S = TB_1 = \sqrt{AA_1 \cdot BB_1}$.

Eddig az ST szakasz hosszára kaptunk egy felső becslést: tudjuk, hogy ez M helyzetétől függetlenül legfeljebb $A_1B_1 - 2\sqrt{AA_1 \cdot BB_2}$. Nekünk azonban ez nem elég: meg kell mutatni, hogy M-nek *van olyan* M_0 helyzete, amelyhez tartozó S_0T_0 szakasz hossza éppen ez az érték, és végül meg is kell szerkesztenünk az *összes* ilyen M_0 pontot.

1985-03-117-1.eps

2. ábra

Ez utóbbi feladat az egyszerűbb. Láttuk, hogy S_0T_0 csak akkor érheti el az (1)-beli felső határt, ha $A_1S_0 = T_0B_1 = \sqrt{AA_1 \cdot BB_1}$. Az AA_1, BB_1 szakaszokat ismerjük, így mértani közepüket könnyen szerkeszthetjük például a magasságtétel segítségével (2. ábra). A $\sqrt{AA_1 \cdot BB_1}$ szakaszt A_1-től B_1 felé, valamint B_1-től A_1 felé felmérve kapjuk az S_0, T_0 pontokat; az AS_0 és BT_0 egyenesek metszéspontja adja ki M_0-t (3. ábra). Ha tehát van a CD körívnek egyáltalán olyan pontja, amire ST az (1) szerinti maximális értéket felveszi, csak ez az M_0 pont lehet.

1985-03-117-2.eps

3. ábra

A feladat megoldásához így elegendő megmutatnunk, hogy az így megszerkesztett M_0 valóban pontja a CD körívnek – ami egyúttal azt is adja, hogy az (1) szerinti maximumot az ST szakasz fel is veszi, és egyedül az M_0 pontban.

Ez utóbbi állítás igazolását azzal kezdjük, hogy megmutatjuk: az S_0, T_0 pontok A_1, S_0, T_0, B_1 sorrendben helyezkednek el az A_1B_1 egyenesen. Ehhez elegendő látni, hogy $A_1S_0 = T_0B_1 = \sqrt{AA_1 \cdot BB_1} \le A_1B_1/2$.

A CD íven tetszőleges M pontot felvéve a hozzá tartozó S, T pontokra $TB_1 \le SB_1$, így

$$\sqrt{AA_1 \cdot BB_1} = \sqrt{A_1S \cdot TB_1} \le \sqrt{A_1S \cdot SB_1} \le \frac{A_1S + SB_1}{2} = \frac{A_1B_1}{2},$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt. Az egyenlőtlenségláncolat első és utolsó tagja adja a kívánt egyenlőtlenséget.

Az AS_0 és BT_0 egyenesek tehát metszik egymást, mégpedig az A_1B_1 egyenesnek A-val, B-vel ellentétes partján. Így abból, hogy $AM_0B\sphericalangle = 90^\circ$ már következik, hogy M_0 a CD körív pontja. Először is, AA_1S_0 és T_0B_1B hasonló derékszögű háromszögek, hiszen $AA_1 : A_1S_0 = T_0B_1 : B_1B$. Így

$$90^\circ = A_1S_0A\sphericalangle + B_1T_0B\sphericalangle = M_0S_0T_0\sphericalangle + M_0T_0S_0\sphericalangle.$$

Az $M_0S_0T_0$ háromszög harmadik szöge valóban 90°, az M_0 pontja a CD körívnek. A megszerkesztendő pont tehát M_0, és ezt meg is szerkesztettük.

Megjegyzés. A feladatnak megoldásánál alapvető fontosságú az a gyakran „elfelejtett” rész, hogy a szerkesztés *helyességét* is igazolni kell. Abból ugyanis, hogy az ST szakasz hosszára (1)-ben egy felső korlátot találtunk, és megmondjuk, hogyan szerkesszük meg azt a pontot, amire ST ezt fel tudja venni, még nem következik, hogy a feladatot megoldottuk: mi biztosítja, hogy szerkesztésünk valóban ad pontot, és ráadásul az a CD ívre is esik? Azt hogy valóban ez a helyzet, külön igazolnunk kell, jelen esetben ez egyáltalán nem nyilvánvaló!

II. megoldás. Húzzunk A-n keresztül párhuzamost CD-vel, messe ez a félkört másodszor E-ben (4. ábra). Tekintsük az AE egyenesnek azt a T' pontját, amelyre az $ASTT'$ négyszög paralelogramma.

1985-03-118-1.eps

4. ábra

1985-03-118-2.eps

5. ábra

Mivel $AT' = ST$, $CD||AE$, ezért T' belső pontja az AE szakasznak. Az $AEB\sphericalangle = T'EB\sphericalangle$ derékszög, tehát AT' és így ST annál nagyobb, minél rövidebb BT'. Mivel $T'T$ és AS párhuzamos, $T'TB\sphericalangle = AMB\sphericalangle = 90°$. Legyen BT' felezőpontja K, erre $BT' = 2BK = 2 \cdot KT$. Ha párhuzamost húzunk az AB átmérő F felezőpontján át AE-vel, K rajta lesz ezen az e egyenesen, és KT nem kisebb, mint e és az AE egyenes d távolsága. Ha tehát tudunk olyan M pontot szerkeszteni, amelyhez tartozó T' pontra $BT' = 2d$, akkor erre az M pontra lesz az ST szakasz maximális. Ennek szerkesztése a következőképp történhet. B középpontú, $2d$ sugarú kört húzunk, ez az AE szakaszt pontosan egyszer metszi. Ugyanis BE az e és AE távolságának kétszerese, ami kisebb e és CD távolságának kétszeresénél, $2d$-nél, következésképp a körnek van metszéspontja az AE egyenessel. Másrészt $2d$ kisebb a kör átmérőjénél, $BE \perp AE$, így a kör és az AE egyenes egyik metszéspontja az AE szakaszon van, a másik a szakasz E-n túli meghosszabbításán. Legyen ez a metszéspont T'. A BT' mint átmérő fölé rajzolt kör éppen érinti a CD egyenest, hiszen középpontja d távolságra van a CD egyenestől, és d ennek a körnek a sugara. Legyen az érintési pont T. Messe BT egyenes az AB fölötti félkört másodszor M-ben. $BTT'\sphericalangle = 90°$ és $AMB\sphericalangle = 90°$, a két szög egy szára közös, tehát AM és TT' párhuzamos. Ebből következik, hogy M csak a CD köríven és T csak a CD szakaszon lehet.

Állítjuk, hogy M éppen a keresett pont, ami most már nyilvánvaló: AM és CD metszéspontját S-sel jelölve a szerkesztett $ASTT'$ négyszög paralelogramma, tehát M-hez éppen olyan T' tartozik, amelyre $BT' = 2d$.