I. megoldás. Gondoljuk el, hogy Andi és Bandi nap nap után elmegy a Filatéliába és Bandi megmaradt gyűjteményének (egyik) legértékesebb darabját, Andi pedig a még meglevők közül a legértékesebb kettőt adja el. Ezt csinálják addig, míg összes bélyegük el nem fogy. Állítjuk, hogy minden nap Andi legfeljebb kétszeresét kapja annak az összegnek, mint amit Bandi kap, ebből a feladat állítása azonnal következik.

Első nap ez így van, hiszen a feltétel szerint Bandi legértékesebb bélyegénél nagyobb értékű Andinál sem lehet, és ugyanolyan értékűből is legfeljebb kettő.

Vegyük még észre, hogy az első napi eladások után maradt gyűjteményekre is igaz a feladat szövegében mondott feltétel. Ha most valamilyen $é$-re $é$-nél drágább bélyegből Andinál a, Bandinál b darab van, akkor azt kell látnunk, hogy $a \leq 2b$. Persze csak az az eset érdekes, ha $a \neq 0$. Andi két legértékesebb bélyegét adta el, tehát ekkor eredetileg $a+2$ darab $é$-nél értékesebb bélyege volt, Bandinak pedig b vagy $b+1$ aszerint, hogy Bandi eladott bélyege $é$-nél értékesebb volt-e vagy sem. Így $a+2 \leq 2b$ vagy $a+2 \leq 2(b+1)$, ahonnan mindenképpen $a \leqq 2b$, ahogyan kívántuk.

Tehát Andi és Bandi másnap ugyanolyan feltételekkel mennek bélyeget eladni, mint az első nap. Andi második nap is legfeljebb kétszer annyit kap bélyegeiért, mint Bandi; ugyanígy a harmadik napon is stb.

Előbb-utóbb mindkét gyűjtemény elfogy, s mivel minden nap Andi legfeljebb kétszer annyit kap, mint Bandi, gyűjteménye is legfeljebb kétszer olyan értékes.

II. megoldás. A bizonyítás egy érdekes algebrai azonosság – az úgynevezett Abel-féle átrendezés – felhasználásával könnyen elvégezhető.

Jelölje a két gyűjteményben szereplő bélyegértékeket nagyság szerint növekvő sorrendben $0 = e_0 < e_1 < e_2 < \ldots < e_n$, és minden $i \geq 0$-ra az e_i értékű bélyegből legyen Andi gyűjteményében a_i, Bandiéban pedig b_i darab. Itt a_i és b_i egyike esetleg 0. Andi gyűjteményének értékét A-val, Bandiét B-vel jelölve

$$A = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n,$$
$$B = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy fennállnak az alábbi azonosságok ($e_0 = 0$ volt!)

$$A = (a_1 + \ldots + a_n)(e_1 - e_0) + \ldots + (a_i + \ldots + a_n)(e_i - e_{i-1}) + \ldots + a_n(e_n - e_{n-1}) \tag{1}$$
$$B = (b_1 + \ldots + b_n)(e_1 - e_0) + \ldots + (b_i + \ldots + b_n)(e_i - e_{i-1}) + \ldots + b_n(e_n - e_{n-1}) \tag{2}$$

A és B fenti alakjában a szorzatok első tényezői rendre a $0,\ e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$-nél drágább bélyegek számai a két gyűjteményben, így a feltétel szerint

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_n \leq 2(b_i + b_{i+1} + \ldots + b_n)$$

minden i-re.

Mivel $e_i > e_{i-1}$, az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $(e_i - e_{i-1})$-gyel szorozva

$$(a_i + \ldots + a_n)(e_i - e_{i-1}) \leq 2(b_i + \ldots + b_n)(e_i - e_{i-1}) \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Ezeket összegezve (1) és (2) alapján éppen a bizonyítandó állítás adódik.

Megjegyzés. Az említett átalakítás – (1), illetve (2) – *Niels Henrik Abel* (1802-1829), a fiatalon elhunyt kiváló norvég matematikus nevéhez fűződik. Abel alapvető eredményeket ért el az analízis és az algebra területén, többek között ő adott elsőként teljes bizonyítást arra, hogy az ötöd- és magasabbfokú egyenletek általában nem oldhatók meg algebrai úton, tehát a gyökök nem fejezhetők ki az együtthatók és véges sok racionális konstans felhasználásával a négy alapművelet és a gyökvonás segítségével.