I. megoldás. Legyen az $AB=c$ átfogó felezőpontja F, a beirt kör sugara ϱ, érintési pontjai az AB-n D, AC-n E. Legyen AF az a szakasz, ami a feltétel szerint derékszög alatt látszik. Ekkor AOF derékszögű háromszögben a magasságtétel szerint (1. ábra).

$$DO^2 = AD \cdot DF = \varrho^2. \tag{1}$$

1984-11-391-1.eps

1. ábra

Tudjuk továbbá, hogy

$$\varrho = OE = CE = s-c = \frac{a+b-c}{2},$$

illetőleg

$$DA = s-a = \frac{b+c-a}{2},$$

és

$$DF = \frac{c}{2} - AD = \frac{a-b}{2}.$$

AD, DF és ϱ fenti kifejezéseit (1)-be helyettesítve

$$\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2, \tag{2}$$

azaz $3ac+bc = 2a^2+2b^2+c^2$. Ebből és az $a^2+b^2=c^2$ összefüggésből

$$b = 3c-3a,$$

amit a $b^2=c^2-a^2$-be visszahelyettesítve és rendezve

$$5\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 9\left(\frac{a}{c}\right) + 4 = 0.$$

Az egyenletből $\frac{a}{c}=1$ vagy $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$. Az első érték nyilván nem felel meg a feltételnek, hiszen $c>a$. Ha pedig $\frac{a}{c}=\frac{4}{5}$, akkor $\frac{b}{c}=\frac{3c-3a}{c}=\frac{3}{5}$, azaz a derékszögű háromszög oldalainak aránya $3:4:5$. Ilyen értékekkel (2) teljesül, és így (1) is, ami azt jelenti, hogy ekkor az AF szakasz O-ból valóban derékszög alatt látszik.

II. megoldás. Legyen a háromszög AB átfogójának felezőpontja F és tegyük fel, hogy O közelebb van A-hoz, mint B-hez (2. ábra).

1984-11-391-2.eps

2. ábra

Az OA, OB, OC szakaszok a háromszög szögfelezői, tehát

$$AOB\sphericalangle = 180^\circ - (OAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle) = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

mivel a háromszög C-nél derékszögű és így $\alpha+\beta=90^\circ$. A feltétel szerint $AOF\sphericalangle = 90^\circ$, tehát $BOF\sphericalangle = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. Nagyítsuk ki B-ből kétszeresére a BOF háromszöget, F ekkor A-ba, O pedig – mondjuk – P-be kerül. A nagyítás miatt

$$AP = 2\cdot FO \quad \text{és} \quad BPA\sphericalangle = OPA\sphericalangle = BOF\sphericalangle = 45^\circ.$$

Az OAP háromszögben tehát P-nél 45°-os szög van, O-nál $180^\circ - BOA\sphericalangle = 45^\circ$. Ezért OPA egyenlő szárú: $AO=AP$, tehát

$$AO:OF = AP:OF = 2:1.$$

Legyenek a beírt kör érintési pontjai az AB, BC, CA oldalakon rendre R, S és T. Az AOF és ARO derékszögű háromszögek hasonlók, hiszen A-ban közös szögük van, ezért $AR : RO = AO : OF = 2 : 1$, következésképp

$$AR = AT = 2OR = 2\varrho,$$

ahol ϱ jelöli a beírt kör sugarát. Az $OSCT$ négyszög S-nél, C-nél, T-nél levő szöge derékszög, $OS = OT = \varrho$, ezért ez a négyszög négyzet is, tehát

$$CS = CT = \varrho.$$

Végül a még ismeretlen $BR = BS = x$ szakaszt a Pitagorasz-tételből számítjuk ki:

$$(AR + x)^2 = (CS + x)^2 + CA^2,$$

azaz

$$(2\varrho + x)^2 = (\varrho + x)^2 + 9\varrho^2,$$

ahonnan $x = 3\varrho$. Innen a háromszög oldalainak aránya

$$AB : BC : CA = (AR + RB) : (BS + SC) : (CT + TA) = 5\varrho : 4\varrho : 3\varrho,$$

egyezésben az előző megoldás során kapott értékekkel.