Először megvizsgáljuk, hogy milyen élei, illetve lapjai lehetnek egy ilyen tetraédernek. Eközben a háromszög-egyenlőtlenséget használjuk majd fel. A talált élrendszerekből azonban nem szükségképpen építhető valóságos tetraéder, így megadunk egy feltételt, amelynek segítségével – némi számolás után – valamennyi talált élrendszerről eldönthető, hogy létezik-e a neki megfelelő tetraéder.

Betűzzük meg a tetraéder éleit az 1. ábra szerint.

1986-02-068-1.eps

1. ábra

Ha a tetraéderben van 4-nél hosszabb él, akkor az ehhez az élhez csatlakozó két háromszögben a másik két oldal hosszának összege legalább 6, hisz az élek hossza egész. Már az eddig felsorolt öt él hosszának összege is legalább $5+2\cdot 6=17$, tetraéderünknek tehát nem lehet 4-nél hosszabb éle.

Vizsgáljuk most, hogy milyen rövid élei lehetnek a tetraédernek, tegyük fel, hogy valamelyikük, mondjuk az a él hossza 1. Ismét a háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy az a élt tartalmazó háromszögekben a másik két-két oldal különbségének abszolút értéke kisebb az a hosszánál, ami 1. Egész számokra ez csak úgy teljesülhet, ha egyenlők. Az egységnyi hosszú a él tehát egy-egy egyenlő szárú háromszög közös alapja, $b=c$ és $e=f$. Az a-val szemközti d él hosszára innen

$$d=17-2(b+e)-1$$

adódik, d tehát páros. Mivel pedig 4-nél hosszabb él nincs, $d=2$ vagy pedig $d=4$.

Ha $d=2$, akkor $b+e=7$, és így (ismét használva, hogy az élek hossza legfeljebb 4), kapjuk, hogy $b=3$ és $e=4$, vagy pedig $b=4$ és $e=3$. A talált két megoldás azonban az élpárok szimmetrikus elhelyezkedése miatt egybevágó. (I)

Ha $d=4$, akkor $b+e=6$, ahonnan most két különböző megoldást kapunk:

$$b=2 \quad \text{és} \quad e=4, \qquad \text{vagy} \qquad b=3 \quad \text{és} \quad e=3. \qquad\qquad (\mathrm{II-III})$$

Vizsgáljuk most már azokat a tetraédereket, amelyekben minden él hosszabb, mint 1. Nyilván nem lehet mind a hat él 2-nél is hosszabb, hisz így az élek hosszának összege legalább $6\cdot 3=18$ volna. Van tehát a tetraédernek 2 hosszúságú éle. Abban az esetben, amikor a további élek hossza egyenlő, tehát mindegyikük 3, nyilván valamennyi oldallap létrejön, így újabb megoldást kapunk (IV).

Meg kell még vizsgálnunk azokat az eseteket, amikor a megmaradó öt él közül nem mindegyik hossza 3, van tehát köztük 2 és 4 hosszúságú is. Három él hosszára tehát a 2, 2, illetve 4 adódik, a további három hosszának összege így 9. A 9 kétféleképpen bontható három darab 2 és 4 közé eső egész szám összegére: $9=2+3+4=3+3+3$. Eszerint az élek hosszaira két lehetőség adódik:

$$\text{(a)} \qquad \{2,2,2,3,4,4\}, \text{ illetve} \qquad \text{(b)} \qquad \{2,2,3,3,3,4\}.$$

A továbbiakban arra kell ügyelnünk az esetek számbavételekor, hogy a 2, 2, 4 hosszúságú szakaszokból nem alkotható háromszög, minden más elrendezés viszont már megengedett – az oldallapok létezése szempontjából.

Az (a) esetben három darab 2 hosszúságú él van. E három él nem indulhat közös csúcsból, hisz ilyenkor 4 hosszúságú él kötné össze másik csúcsaikat. A 2 hosszúságú élek tehát a 2. ábrán látható módon nyílt töröttvonalat alkotnak, vagy pedig – zárt – háromszöget. A „nyílt” esetben azonban csak egy 4 hosszúságú élt tudunk elhelyezni – a töröttvonal kezdő- és végpontja között – úgy, hogy ne jöjjön létre elfajuló háromszög, ez a lehetőség tehát elesik. A „zárt” esetben viszont a további három oldallap is létrejön, és a szabályos háromszög csúcsaiból induló 3, 4, 4 hosszúságú élek szerepének szimmetrikus volta miatt egyetlen újabb megoldást kapunk. Egy lehetséges betűzés:

(V) $$a=b=c=2, \qquad d=3, \qquad e=f=4.$$

A (b) esetben is a három egyenlő, 3 egységnyi hosszú él elhelyezkedése szerint érdemes elkülöníteni az eseteket. Ezek elrendezése most is csak a 2. ábrán látható két lehetőség szerint történhet, ha ugyanis közös csúcsból indulnának, akkor a másik végpontok által meghatározott háromszögben 2, 2 és 4 volnának az oldalak.

1986-02-068-2.eps

2. ábra

A „nyílt” esetben most két, nem egybevágó megoldás adódik aszerint, hogy a leghosszabb, 4 hosszúságú él a „kiegészítő” – a 2. ábrán szaggatott vonallal rajzolt – töröttvonalnak szélső vagy pedig belső szakasza. Egy-egy betűzés:

(VI) $$a=b=d=3, \qquad c=4, \qquad e=f=2,$$

illetve

(VII) $$a=b=d=3, \qquad c=f=2, \qquad e=4.$$

A „zárt” esetben viszont a már említett szimmetria miatt csak egy megoldást kapunk. Egy betűzés:

(VIII) $$a=b=c=3,\qquad d=e=2,\qquad f=4.$$

Foglaljuk most táblázatba a lehetséges élvázakat az 1. ábra betűzése alapján.

	a	b	c	d	e	f
I.	1	3	3	2	4	4
II.	1	2	2	4	4	4
III.	1	3	3	4	3	3
IV.	2	3	3	3	3	3
V.	2	2	2	3	4	4
VI.	3	3	4	3	2	2
VII.	3	3	2	3	4	2
VIII.	3	3	3	2	2	4

1. táblázat

1986-02-069-1.eps

3.a ábra

1986-02-069-2.eps

3.b ábra

A 3. ábra sejteti, hogy az élrendszer, illetve az oldallapok létezése még nem feltétlenül jelenti a megfelelő tetraéder létezését is. Vizsgáljuk meg, minek kell teljesülnie ahhoz, hogy létező oldallapokból tetraédert építhessünk! Terítsük ki ehhez egy tetraéder élvázát az ABC lapjának az S síkjára (4a ábra).

1986-02-070-1.eps

4.a ábra

Ha a satírozott két háromszöget „fel tudjuk hajtani” egy B csúcsú triéderré, akkor a triéderben a B csúccsal szemközt egy f, b, d élű – tehát a megmaradt CD_BA háromszöggel egybevágó háromszög jön létre (4b ábra), amely ezzel a negyedik lappal így lezárható.

1986-02-070-2.eps

4.b ábra

Azt állítjuk, hogy a B csúcsú triéder létrejötte kizárólag az élváz B csúcsánál levő három szög, a D_ABC, a CBA és az ABD_C szögek (a 4a ábrán φ, γ és δ) viszonyától függ.

A szóban forgó triéder ugyanis pontosan akkor jön létre, ha a BD_C félegyenesnek a BA tengely körüli, illetve a BD_A félegyenesnek a BC tengely körüli megforgatásával kapott két, B csúcsú kúppalást metszi egymást – a metszésvonal két, az S síkra szimmetrikus alkotó (5. ábra).

1986-02-070-3.eps

5. ábra

A két kúppalást viszont pontosan akkor metszi egymást, ha az említett három szög közül bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál. A feltétel ugyanis elégséges, hiszen ebben az esetben az egyik palástot rögzítve a másik, forgó egyenesnek az S síkba eső két helyzete közül az egyik a paláston kívül, a másik pedig annak belsejében halad, így útja során feltétlenül metszenie kell azt. Szükséges is a feltétel, hiszen ha $\varphi+\delta \leqq \gamma$, akkor a két kúppalást „egymáson kívül" helyezkedik el (esetleg érintik egymást az S síkban) – ez felel meg a 3a ábra „túl kicsi" oldallapjainak – ha pedig például $\delta+\gamma \leqq \varphi$, akkor a nagyobb nyílásszögű kúppalást tartalmazza a kisebbiket (3b ábra).

Ezt a – némiképpen a háromszög egyenlőtlenségre emlékeztető – szükséges és elégséges feltételt kell most már ellenőriznünk a talált nyolc élrendszerre. Jegyezzünk meg azonban még annyit, hogy noha a B csúcs, illetve a B-nél létrejövő szögek kiválasztása önkényesnek tűnhet, a fentiekből az is következik, hogy a talált feltétel egyidejűleg teljesül vagy nem teljesül, akármelyik lapot és azon bármelyik csúcsot szemeljük is ki.

Nos, ami a számolást illeti, a szögeket a koszinusztétel segítségével számolhatjuk, a

$$\cos\varphi=\frac{e^2+a^2-f^2}{2ae};\qquad \cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$
$$\cos\delta=\frac{b^2+e^2-d^2}{2be}$$

összefüggések alapján. Így a 2. táblázatban szereplő értékek adódnak.

A táblázat adatait szemügyre véve látható, hogy az első hét esetben teljesül a feltétel, a nyolcadik esetben viszont nem, $\varphi>\gamma+\delta$ így a VIII. $\{3,3,3,2,2,4\}$ élű tetraéder nem létezik.

	$\cos\varphi$	$\cos\gamma$	$\cos\delta$	φ	γ	δ
I.	1/8	1/6	7/8	82,8°	80,4°	28,95°
II.	1/8	1/4	1/4	82,8°	75,52°	75,52°
III.	1/6	1/6	1/9	80,4°	80,4°	83,62°
IV.	1/3	1/3	1/2	70,53°	70,53°	60°
V.	1/4	1/2	11/16	75,52°	60°	46,56°
VI.	3/4	1/9	1/3	41,41°	83,62°	70,53°
VII.	7/8	7/9	2/3	28,95°	38,94°	48,19°
VIII.	-1/4	1/2	3/4	104,48°	60°	41,41°

2. táblázat

Összefoglalva tehát összesen hét olyan tetraéder létezik, amelyek éleinek hossza egész szám, s az élek hosszának összege 17. A megoldásokat az 1. táblázat első hét sora tartalmazza.

Megjegyzések. **1.** Megállapodás szerint az ilyen típusú feladatok egybevágó megoldásait nem tekintjük különbözőnek, azonban térbeli alakzatokról lévén szó, indokoltnak tűnhet a csak síkra való tükrözéssel egymásba vihető alakzatok megkülönböztetése. (Gondoljunk egy pár kesztyű két darabjára, vagy a balkezesek a jobbkezes ollókra. Nálunk kizárólag ilyenek kaphatók.)

Ennek megfelelően a 2. ábra „nyílt" esetében kapott megoldások – a VI. és a VII. – valamilyen síkra vonatkozó tükörképei egy-egy – ilyen értelemben – újabb megoldást adnak. Az I–V. megoldásban az a él felező merőleges síkja szimmetriasík, a tükrözés nem vezet új megoldásra.

2. Megemlítjük, hogy a VII-es megoldásban 2–2 lap egyező körüljárásúan egybevágó és van olyan tengely, amely körül a 180°-os forgatás önmagába viszi át a testet, ez a b, d élpár felezőpontjait összekötő egyenes. A kristálytanban *digir*nek nevezik az ilyen tengelyt. *Sík*idomot az ilyen forgatás a tengelyes tükörképébe viheti át, ha van tengelye – pl. egyenlő szárú háromszöget – , térbeli alakzatnál viszont a forgatás és a tükrözés lényegesen különböző szimmetriaműveletek.