Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon α, β, γ-val, az A-ból induló f_a szögfelező és a BC oldal metszéspontját M-mel. (M nyilván belső pontja a BC oldalnak.) Írjuk fel a BAC, BAM, MAC háromszögek területét két oldaluk és a közbezárt szögnek a felhasználásával:

$$\frac{bc\sin\alpha}{2}=T_{BAC}=T_{BAM}+T_{MAC}=\frac{bf_a\sin\frac{\alpha}{2}}{2}+\frac{cf_a\sin\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

A $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ helyettesítéssel rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{f_a}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}.$$

Mivel α egy háromszög szöge, $0^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ$, és ezért $0<\cos\frac{\alpha}{2}<1$, amiből

$$\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{f_a}<\frac{1}{f_a}.$$

1985-02-064-1.eps

Hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{1}{2c}+\frac{1}{2a}<\frac{1}{f_b},\quad \text{és}\quad \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}<\frac{1}{f_c}.$$

Az egyenlőtlenségek megfelelő oldalait összeadva

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{f_a}+\frac{1}{f_b}+\frac{1}{f_c},$$

az állítás tehát valóban igaz.

Megjegyzés. Az is igazolható, hogy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{f_a}+\frac{1}{f_b}+\frac{1}{f_c}\right),$$

és egyenlőség csak a szabályos háromszögnél lép fel.