

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy m -nek a legkisebb, \sqrt{a} -nál nagyobb egész megfelel, azaz

$$a < ([\sqrt{a}] + 1)^2 < d.$$

Az első egyenlőtlenség nyilvánvaló, hiszen egy \sqrt{a} -nál nagyobb szám négyzete nagyobb, mint a , és $\sqrt{a} < [\sqrt{a}] + 1$. Másfelől

$$m = [\sqrt{a}] + 1 \leq \sqrt{a} + 1, \quad \text{ahonnan} \\ m^2 \leq (\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1.$$

Elegendő igazolni, hogy

$$(1) \quad a + 2\sqrt{a} + 1 < d.$$

Legyen $b = a + x$, $c = a + y$, $d = a + z$, itt x, y, z pozitív egészek és $0 < x < y < z$. Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$(2) \quad 2\sqrt{a} + 1 < z.$$

A feltétel szerint $a(a + z) = (a + x)(a + y)$, ahonnan

$$(3) \quad (z - (x + y))a = xy.$$

A bal oldalon a együtthatója egész, és mivel a jobb oldal pozitív, így legalább 1. Így egyrészt

$$(4) \quad z - 1 \geq x + y,$$

másrészt

$$(5) \quad xy > a.$$

(4)-ből $\frac{z-1}{2} \geq \frac{x+y}{2}$; (5)-ből pedig $\sqrt{xy} \geq \sqrt{a}$. De x és y különböző egészek, így számtani közepük határozottan nagyobb mértani közepüknél. Igaz tehát, hogy

$$\frac{z-1}{2} \geq \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy} \geq \sqrt{a},$$

vagyis $\frac{z-1}{2} > \sqrt{a}$, ahonnan rendezés után (2) adódik. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Induljunk ki az $ad = bc$ összefüggésből. Az ad -t prímszámok szorzataként felírva ezeket a prímeket ketté tudjuk osztani úgy is, hogy az egy-egy csoportba esők szorzata a , illetve d legyen, és úgy is, hogy a szorzatok értéke b , valamint c legyen. Ám akkor ezek a prímek négy csoportba oszthatók, mondjuk P -be, Q -ba, E -be és S -be, úgy hogy a P és Q -beli prímekek szorzata a , az R és S -belieké d ; a P -be és R -be eső prímekek szorzata a b -t adja ki, a Q -ba és S -be esők szorzata pedig c -t. Az egy csoportba eső prímekek szorzatát a megfelelő kisbetűvel jelölve azt kapjuk, hogy vannak olyan pozitív egész p, q, r, s számok, amelyekre

$$a = pq, \quad b = pr, \quad c = qs, \quad d = rs.$$

Az $a < b < c < d$ alapján $pq < pr < qs < rs$, azaz

$$(6) \quad q < r \quad \text{és} \quad p < s.$$

Akkor van olyan m egész, amire $a < m^2 < d$, ha \sqrt{a} és \sqrt{d} közé esik egész szám, és ez biztosan így van, ha kettejük különbsége nagyobb 1-nél:

$$(7) \quad \sqrt{d} - \sqrt{a} = \frac{d - a}{\sqrt{d} + \sqrt{a}} > 1.$$

Elegendő tehát ezt bizonyítanunk. (6) szerint $r - q - 1$, valamint $s - p - 1$ nem negatívak, azért

$$(r + q)(s - p - 1) + (p + s)(r - q - 1) \geq 0,$$

ahonnan

$$rs - pq \geq \frac{p + q + r + s}{2}.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a jobb oldalra alkalmazva

$$rs - pq \geq \sqrt{pq} + \sqrt{rs}$$

adódik. Ez pedig a bizonyítandó (7) egyenlőtlenséggel egyezik meg, ha megmutatjuk, hogy az egyenlőség nem állhat fenn. Ha ugyanis a két oldal mégis egyenlő volna, akkor szükségképpen $p = q$ és $r = s$, hiszen a számtani és mértani közepük egyenlő és ekkor $b = pr = qs = c$, ellentétben a $b < c$ feltétellel.