

Megadunk egy ilyen felbontást. Legyen

$$g(x) = x^2 + 2x^2 + 5x - 3,$$

$$h(x) = x^3.$$

Ekkor $f(x) = g(x) - h(x)$. Állítjuk, hogy $g(x)$ és $h(x)$ szigorúan monoton növekvő függvények. Valóban legyen $x_1 > x_2$. Ekkor

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= (x_1^3 + 2x_1^2 + 5x_1) - (x_2^3 + 2x_2^2 + 5x_2) = \\ &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 5) = \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_2) (x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2 + 2)^2 + 6) > 0, \end{aligned}$$

hiszen az utolsó szorzat mindkét tényezője pozitív. Hasonlóan

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \\ &= (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right] > 0. \end{aligned}$$

Mivel az első tényező $x_1 > x_2$ miatt pozitív, a második nem negatív és csak akkor 0, ha $x_1 = x_2 = 0$, ami ellentmond az $x_1 > x_2$ feltevésnek, így mindkét függvény szigorúan monoton növekvő, és $f(x) = g(x) - h(x)$ egy kívánt alakú felbontás.