Jelöljük a nagyítás után kapott háromszög csúcsait rendre $K$, $L$, $M$-mel, ahol $K$ a $P$-vel szemközti csúcs. Tudjuk, hogy az $ABC$ háromszög az $RQP$ háromszög $S$ súlypontjából $-\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítéssel jött létre, azaz e két háromszög súlypontja megegyezik. Jelölje a $PB$ súlyvonal és $AC$ oldal metszéspontját $P_1$, ekkor $PP_1 = \frac{1}{2}PB$, $PS = \frac{2}{3}PB$, ahonnan $PS = 4P_1S$. Az $LM$ szakasz metszi a $PP_1$ szakaszt, és így a $PQR$ háromszög $PA$, $PC$ oldalszakaszait is. Ez pedig azt jelenti, hogy a $D_1D_2E_1E_2F_1F_2$ valódi (konvex) hatszög. Ha viszont $k \leq 1$, akkor a $KLM$ képháromszög kisebb, mint az eredeti $ABC$ háromszög; ha pedig $k \geq 4$, akkor a képháromszög tartalmazza a $PQR$ háromszöget, a megfelelő oldalak nem metszik egymást, nem jön létre hatszög.

1985-01-019-1.eps

*1. ábra*

Legyen tehát $1 < k < 4$, és jelöljük a $PP_1$ és $D_1F_2$ szakaszok metszéspontját $P_2$-vel. Az $ABC$ és $MKL$ háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{P_2S}{P_1S} = k,$$

és így

$$\frac{PP_2}{P_1S} = \frac{PS - P_2S}{P_1S} = \frac{PS}{P_1S} - \frac{P_2S}{P_1S} = 4 - k.$$

A $PD_1F_2$, $F_1E_2R$, $D_2QE_1$ háromszögek mindegyike hasonló a $PQR$ háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $PB = 3 \cdot BS = 3 \cdot (2 \cdot P_1S)$ alapján

(1) $$\lambda = \frac{PP_2}{PB} = \frac{PP_2}{6P_1S} = \frac{4-k}{6},$$

mindhárom esetben. A kis háromszögek tehát egybevágóak, területük a $PQR$ háromszög területének $\lambda^2$-szerese.

Jelöljük a $PQR$ háromszög területét $T$-vel. A hatszög területét úgy kaphatjuk meg, hogy $T$-ből kivonjuk a 3 kis háromszög területének összegét. Ennek kell kétszer akkorának lennie, mint az $ABC$ háromszög területe. Ám az $ABC$ háromszög területe $T/4$, ezért a következő összefüggésnek kell fennállnia: $T - 3\lambda^2 T = T/2$, azaz $\lambda^2 = 1/6$. A $\lambda$ helyébe az (1) szerinti $(4-k)/6$-ot helyettesítve $(4-k)^2 = 6$, amit az $1 < k < 4$ feltétel mellett csak a $k = 4 - \sqrt{6}$ érték elégít ki.

Így $k$ értéke csak $4 - \sqrt{6}$ lehet. Ha $k$-t ennyinek választjuk, (1) alapján az egybevágó $PD_1F_2$, $F_1E_2R$, $D_2QE_1$ háromszögek a $PQR$ háromszögből $\lambda =$
$= \sqrt{6}/6$ arányú kicsinyítéssel jönnek létre, tehát a hatszög területe

$$T - 3\lambda^2 T = T - \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}T,$$

valóban megegyezik az $ABC$ háromszög területének kétszeresével.

*Megjegyzések.* 1. A feltételként kapott $(4-k)^2 = 6$ egyenletet a $k = 4 - \sqrt{6}$ értéken kívül a $k = 4 + \sqrt{6}$ is kielégíti. Mi lehet ennek a második megoldásnak a geometriai jelentése? Az $ABC$ háromszöget $(4+\sqrt{6})$-szorosára kinagyítva, a kapott $MKL$ háromszög oldalai nem metszik a $PQR$ háromszög *oldalszakaszait,* hanem csak *oldalegyeneseit.* A keletkezett $D_1D_2E_1E_2F_1F_2$ idom „hurkolt" hatszög. Ha ennek „területét" úgy definiáljuk, hogy a $PQR$ háromszög területéből *levonjuk* a vonalkázott „hurkok" területét, akkor erre a hatszögre is teljesül, hogy „területe" kétszerese az $ABC$ háromszög területének (2. ábra).

1985-01-019-2.eps

*2. ábra*

2. A maximális pontszámot azok kapták meg, akik azt is indokolták, hogy a $(4-k)^2 = 6$ egyenlet megoldásaként adódó $k = 4 - \sqrt{6}$ miért megoldása a feladatnak is (és nemcsak ennek az egyenletnek), illetve hogy a másik, $k = 4 + \sqrt{6}$ miért nem megoldás.