I. megoldás. Az ABC háromszög derékszögű, a derékszög a C csúcsnál van, vagyis $AC \perp BC$. Ez, valamint $OM \perp BC$ miatt $OM||AC$, s mivel O felezi AB-t, OM az ABC háromszög középvonala. Így $AC = 2OM$.

1984-11-387-1.eps

Az ABC derékszögű háromszög AC befogójára felírhatjuk az ismert befogótételt. Az $AD = x$ jelölés mellett, felhasználva az előző összefüggéseket

$$2 \cdot OM = AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{AD \cdot (AD + DB)} = \sqrt{x(x + 3 \cdot OM)}.$$

Innen rendezés után az

$$x^2 + 3 \cdot OMx - 4 \cdot OM^2 = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Az egyenlet gyökei $x_1 = OM$, $x_2 = -4 \cdot OM$, közülük nyilván csak a pozitív értékűt kell figyelembe vennünk. Az ABC háromszögben tehát $AB = AD + DB = 4OM$, innen $AB = 2 \cdot AC$. Az ABC tehát olyan derékszögű háromszög, melyben az átfogó kétszerese a B csúccsal szemközti befogónak, amiből következik, hogy $ABC\sphericalangle = 30°$.

II. megoldás. Rögzítsük a kör AB átmérőjét. Indítsuk el a C pontot az A-ból, és fusson C a kör kerületén egészen B-ig. Menet közben C egyre távolodik A-tól – vagyis az $AC = 2 \cdot OM$ távolság egyre nő –, C-nek az AB-re eső D vetülete pedig közeledik B-hez – vagyis DB állandóan csökken. Ezek szerint az OM/DB hányados számlálója nő, nevezője csökken, tehát a tört értéke C mozgása közben folyamatosan nő. Így C-nek legfeljebb egy olyan helyzete lehet, amikor az OM/DB hányados értéke $1/3$.

Azt könnyű látni, hogy ha $ABC\sphericalangle = 30°$, akkor $OM/DB = 1/3$. Valóban, $OM/DB = (OM/MB) \cdot (MB/DB)$ és $OBM\sphericalangle = CBD\sphericalangle = 30°$ esetén

$$\frac{OM}{MB} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \frac{MB}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CB}{DB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Az OM/DB hányados értéke C-nek semmilyen más helyzetében nem lehet $1/3$, tehát $DB = 3 \cdot OM$ esetén $ABC\sphericalangle = 30°$, amivel a feladat kérdésére válaszoltunk.