I. megoldás. A tér egy tetszőlegesen választott O pontjából a csúcsokba, illetve a harmadoló pontokba mutató vektorokat jelöljük a megfelelő kisbetűvel.

Ekkor pl.

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\frac{1}{3}(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b},$$

és hasonlóképpen

$$\mathbf{q}=\frac{2}{3}\mathbf{b}+\frac{1}{3}\mathbf{c},$$
$$\mathbf{r}=\frac{2}{3}\mathbf{c}+\frac{1}{3}\mathbf{d},$$
$$\mathbf{s}=\frac{2}{3}\mathbf{d}+\frac{1}{3}\mathbf{a}.$$

Az egyenletrendszerből átalakítások után a következő összefüggések adják a csúcsokba mutató vektorokat:

$$\mathbf{a}=\frac{1}{5}(8\mathbf{p}-4\mathbf{q}+2\mathbf{r}-\mathbf{s}),$$
$$\mathbf{b}=\frac{1}{5}(8\mathbf{q}-4\mathbf{r}+2\mathbf{s}-\mathbf{p}),$$
$$\mathbf{c}=\frac{1}{5}(8\mathbf{r}-4\mathbf{s}+2\mathbf{p}-\mathbf{q}),$$
$$\mathbf{d}=\frac{1}{5}(8\mathbf{s}-4\mathbf{p}+2\mathbf{q}-\mathbf{r}).$$

Ezek a kifejezések egyértelműek, tehát P, Q, R és S minden elhelyezkedése egyértelműen határozza meg a keresett A, B, C, D pontnégyest. Az megtörténhet, hogy a négy pont egy síkban van, a tetraéder elfajuló, mégpedig abban az esetben, ha maguk a P, Q, R és S pontok is egy síkban vannak.

II. megoldás. A megoldásban egy szerkesztési eljárást mutatunk be. Fektessünk a tetraéder minden élén át a szemközti éllel párhuzamos síkot. Ez a hat, páronként párhuzamos sík egy paralelepipedont alkot ($AD^*BC^*A^*DB^*C$), melyben a tetraéder élei az oldallapok átlói. (L. az ábra bal oldalán.)

1985-11-382-1.eps

Tekintsük a paralelepipedon AD^* élét harmadoló, AC^*CA^* lappal párhuzamos két síkot. Világos, hogy P és R az A-hoz közelebbi H_1, Q és S pedig az A-tól távolabbi H_2 síkra illeszkednek.

A paralelepipedont e két sík egybevágó paralelogrammákban metszi. Ha most a H_1 síkot a paralelepipedon AD^* élével párhuzamosan a H_2 síkra vetítjük, akkor az R és a P pontok R^* és P^* vetületei, valamint az S és a Q pontok egy M paralelogramma – a H_2 síkmetszete – kerületén helyezkednek el, és M oldalait egyező körüljárás szerint harmadolják. Így maguk is egy paralelogramma csúcsai (l. az ábra jobb oldalán). Ez azt jelenti, hogy az előbbi vetítés során a PR szakasz K_1 felezőpontja a QS szakasz K_2 felezőpontjába kerül, a K_1K_2 irány tehát párhuzamos a vetítés irányával, az AD^* éllel, hossza pedig $AD^*/3$.

Megszerkesztve tehát az SQ-ra illeszkedő, PR-rel párhuzamos H_2 síkot, R^* és P^* az R és P pontok K_1K_2 irányú vetülete lesz ezen a síkon. Az SR^*QP^* paralelogrammát tehát meg tudjuk szerkeszteni, és ha P, Q, R és S nincsenek egy síkban, akkor az így szerkesztett SR^*QP^* négyszög valóban paralelogramma is lesz. (Éppen a $PQRS$ tetraéder köré építhető paralelepipedon egy lapja.)

Most már elegendő az M paralelogrammát megszerkesztenünk. M ugyanis egybevágó a paralelepipedon AA^*CC^* állású lapjával, az AD^* él hosszát és irányát pedig ismerjük. Így a paralelepipedon és ezzel együtt az $ABCD$ tetraéder is megszerkeszthető.

Legyen T a P^*R^* szakasz R^*-hoz közelebb eső harmadoló pontja. Ekkor az ST egyenes nyilván párhuzamos M-nek az R^*-on, illetve a P^*-on áthaladó oldalaival. Ezeket az oldalegyeneseket tehát megszerkeszthetjük, és hasonlóan kapjuk a másik két oldalegyenest, és így végül magát az M paralelogrammát. A leírt szerkesztés mindig elvégezhető, amennyiben P, Q, R és S nem esnek egy síkba, azaz ha a tetraéder nem fajul el.

Megjegyzések. 1. A P középpontú (-2)-szeres nagyítás az A-t a B-be viszi, hasonlóan a Q középpontú (-2)-szeres nagyítás a B-t a C-be, az R középpontú (-2)-szeres nagyítás a C-t a D-be, végül az S középpontú (-2)-szeres nagyítás a D-t ismét az A-ba viszi. Ismeretes, hogy középpontos hasonlóságok egymásutánja ismét középpontos hasonlóság, amennyiben az arányok szorzata nem 1, ami itt teljesül. A fentiekből viszont az következik, hogy az eredő középpontos hasonlóság során az A pont képe önmaga, vagyis A a hasonlóság középpontja, s mint ilyen, egyértelműen meghatározott. Hasonló gondolatmenettel ugyanezt kapjuk a B, a C és a D csúcsokra is.

2. Látható, hogy a megadott harmadolópontok mindig meghatározzák az A, B, C, D pontokat, akár síkbeli, akár pedig térbeli elrendezésből indulunk ki. Bár a második megoldás a síkbeli esetet nem adja ki, a feladat kérdésére adott válasza teljesnek tekinthető.