Legyen először $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy az egyenlőtlenségrendszer megoldható. Ekkor

$$1 < x < 2, \tag{1}$$

$$2 < x^2 < 3, \tag{2}$$

$$n-2 < x^{n-2} < n-1, \tag{3}$$

$$n < x^n < n+1. \tag{4}$$

(1) szerint x pozitív, tehát (2) és (3) alapján $x^n = x^{n-2} \cdot x^2 > 2(n-2)$. Másfelől (4) szerint $x^n < n+1$, így $2(n-2) < n+1$, ahonnan $n < 5$.

Azt kaptuk, hogy ha $n \geq 5$, akkor az egyenlőtlenségrendszernek nincs megoldása. Megmutatjuk, hogy ha $n = 1, 2, 3$ vagy 4, akkor megoldható. Ezt nyilván elegendő $n = 4$-re igazolni, ami pontosan azt jelenti, hogy az alábbi négy intervallum közös része nem üres:

$$I_1 = (1;\, 2), \quad I_2 = (\sqrt{2};\, \sqrt{3}), \quad I_3 = (\sqrt[3]{3};\, \sqrt[3]{4}), \quad I_4 = (\sqrt[4]{4};\, \sqrt[4]{5}).$$

$1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$ miatt $I_2 \subset I_1$. A $2^3 < 3^2 < 4^2 < 3^3$ egyenlőtlenségsorozatból hatodik gyököt vonva kapjuk, hogy $I_3 \subset I_2$. Állításunk most már következik abból, hogy I_3 és I_4 közös része nem üres. A $4^3 < 3^4 < 5^3 < 4^4$ egyenlőtlenségláncból 12-dik gyököt vonva

$$\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4},$$

vagyis $I_3 \cap I_4 = (\sqrt[3]{3};\, \sqrt[4]{5})$, ennek pedig például az $1,45$ eleme.

Az egyenlőtlenségrendszer tehát az $n = 1, 2, 3$, és 4 értékekre oldható meg.

Megjegyzés. Az, hogy az $n \geq 5$ esetben nincs megoldás, adódik abból is, hogy már a $3 < x^3 < 4$ és az $5 < x^5 < 6$ egyenlőtlenségrendszernek sincs megoldása, mert

$$\sqrt[5]{6} < \sqrt[3]{3} \cdot (6^3 = 216 < 243 = 3^5).$$