

Tegyük fel, hogy  $k_1$  a nagyobbik kör, ekkor a közös érintők és a körök középpontját összekötő egyenes (a centrális)  $P$  metszéspontja a centrálison  $O_1$ -nek ugyanarra az oldalára esik, mint  $O_2$  (l. ábra). A  $P_1$  és  $P_2$  érintési pontok  $M_1$ ,  $M_2$  vetülete ugyancsak az  $O_1P$  szakaszra esik.  $M_1$  vagy elválasztja  $O_1$ -et és  $O_2$ -t, és akkor a pontok sorrendje  $O_1, M_1, O_2, M_2, P$  vagy nem, és akkor a sorrend  $O_1, O_2, M_1, M_2, P$ .

1984-04-168-1.eps

1984-04-168-2.eps

A két kör metszéspontjának,  $A$ -nak a vetülete mindkét esetben az  $M_1$  és  $M_2$  közé esik. A bizonyítandó szögegyenlőség helyett az  $O_1AM_1\triangleleft = O_2AM_2\triangleleft$  egyenlőséget fogjuk igazolni. Ez ekvivalens az eredeti egyenlőséggel, melyet az első esetben úgy kapunk, hogy az egyenlőség mindkét oldalából levonjuk a közös  $O_2AM_1\triangleleft$ -t, a második esetben viszont a közös  $O_2AM_1$  szöveget az egyenlőség mindkét oldalához hozzá kell adni.

Nagyítsuk ki a  $k_2$  kört  $P$ -ből mint középpontból úgy, hogy  $k_2$ -nek  $k'_2$ -vel jelölt képe  $k_1$  legyen. Ekkor  $O_2$  az  $O_1$ -gyel,  $M'_2$  az  $M_1$ -gyel,  $P'_2$  a  $P_1$ -gyel lesz azonos, az  $A$  pont képe  $A'$ ,  $PA$ -nak  $k_1$ -gyel való második metszéspontja. A nagyítás szögtartó, ezért  $O_2AM_2\triangleleft = O_1A'M_1\triangleleft$ . Az  $O_1P_1P$  derékszögű háromszögben  $P_1M_1$  magasság, a befogótételt alkalmazva

$$PP_1^2 = PM_1 \cdot PO_1.$$

A  $P$ -ből mint külső pontból a körhöz húzott érintő és szelő szakaszra ismert mértani közép tétel szerint

$$PP_1^2 = PA \cdot PA'.$$

Amiből  $PM_1 \cdot PO_1 = PA \cdot PA'$  adódik, ami azt jelenti, hogy  $M_1, O_1$  és  $A, A'$  egy körön vannak, mégpedig vagy az  $M_1O_1AA'$  vagy pedig az  $M_1O_1A'A$  sorrendben. Az  $O_1M_1$  húrhoz tartozó kerületi szögekre  $O_1A'M_1\triangleleft = O_1AM_1\triangleleft$ , és ezt akartuk igazolni.