**I. megoldás.** Jelöljük a háromszög szögeit a szokásos módon $\alpha$, $\beta$, $\gamma$-val. A pontok a körülírt körön $AC_1BA_1CB_1A$ sorrendben helyezkednek el, így a $B_1C_1$ és az $AA_1$ húrok metszik egymást, jelöljük a metszéspontot $M$-mel. Azt kell megmutatnunk, hogy az $AMC_1$ háromszög derékszögű, vagyis hogy

$$MC_1A\sphericalangle + C_1AM\sphericalangle = 90^\circ. \tag{1}$$

1984-02-072-1.eps

A kerületi szögekre vonatkozó tételek alapján

$$MC_1A\sphericalangle = B_1C_1A\sphericalangle = B_1BA\sphericalangle = \beta/2,$$
$$C_1AM\sphericalangle = C_1AA_1\sphericalangle = C_1AB\sphericalangle + BAA_1\sphericalangle = C_1CB\sphericalangle + BAA_1\sphericalangle = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Innen (1) azonnal adódik, a feladat állítását tehát beláttuk.

**II. megoldás.** Legyen O a háromszögbe írt kör középpontja. A kerületi szögekre vonatkozó tételt felhasználva

$$OC_1A\sphericalangle = CC_1A\sphericalangle = CBA\sphericalangle = \beta,$$

valamint

$$OAC_1\sphericalangle = A_1AC_1\sphericalangle = A_1AB\sphericalangle + BAC_1\sphericalangle = A_1AB\sphericalangle + BCC_1\sphericalangle = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Az $AOC_1$ háromszögben két szöget ismerünk, a harmadikat ki tudjuk számítani:

$$AOC_1\sphericalangle = 180^\circ - OAC_1\sphericalangle - OC_1A\sphericalangle = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) - \beta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = OAC_1\sphericalangle,$$

hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Az $AOC_1$ tehát egyenlő szárú háromszög, $C_1A = C_1O$, és így $C_1$ rajta van az $AO$ szakasz felező merőlegesén.

Hasonlóan látható, hogy $AOB_1$ is egyenlő szárú háromszög, tehát $B_1$ is rajta van $AO$ felező merőlegesén – így $B_1C_1$ valóban merőleges $AA_1$-re, amit bizonyítani akartunk.