I. megoldás. Egy oszlop vagy egy sor átfestésekor pontosan 12 mező színe változik meg. Így ha átfestés előtt ott f fehér mező volt, akkor az átfestés után $12-f$ lesz. És mivel f és $12-f$ azonos párosságú, a sakktáblán található fehér mezők paritása az átfestések során nem változik.

Ezek szerint ha a sakktáblán a fehér mezők száma eredetileg páratlan volt, ez a szám minden átfestés után páratlan marad, és így nem érhető el, hogy a fehér mezők száma nulla, azaz páros legyen.

II. megoldás. A csupa fekete mezőjű sakktáblát pontosan azokból a színezésekből kiindulva lehet előállítani, amelyek a feketére festett táblákból nyerhetők a fent leírt módon. Az eljárás olyan, hogy a színezés sorrendje nem befolyásolja a végeredményt, másrészt ugyanannak a sornak, ill. oszlopnak kétszeri átfestése elhagyható. Így feltehető, hogy minden sort és oszlopot legfeljebb egyszer festünk át.

Az oszlopok és sorok együttes száma 24, így összesen 2^{24} módon jelölhetjük ki, hogy mely oszlopokat, ill. sorokat kell átfesteni, tehát legfeljebb 2^{24} olyan színezése van a sakktáblának, amiből a csupa fekete mezőjű tábla előállítható.

Ugyanakkor a sakktábla 144 mezőjét 2^{144}-féleképpen lehet két színnel kiszínezni, így a $2^{144}>2^{24}$ miatt van olyan színezés, amelyből nem érhető el, hogy minden mező fekete legyen. A feladat kérdésére a válasz: nem.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldás mintájára igazolható a következő állítás. Ha elérhető, hogy valamennyi mező fekete legyen, akkor bárhogy veszünk ki két sort és két oszlopot, a metszéspontjaikban álló négy mezőből páros számúnak kell fehérnek lennie. Így például az ábrán látható táblából kiindulva nem érhető el a csupa fekete tábla, annak ellenére, hogy minden sorban és minden oszlopban páros sok fehér mező van.

1984-04-162-1.eps

A most megfogalmazott feltétel nemcsak szükséges, hanem elégséges is: ha teljesül, a fekete tábla elérhető.

2. Azt is könnyű meggondolni, hogy a „jó” színezések száma nem 2^{24} – például ha mindegyik oszlopot és mindegyik sort átfestjük, ugyanazt érjük el, mintha nem festettünk volna semmit –, hanem 2^{23}.