Jelöljük a derékszögű háromszög csúcsait A, B, C-vel, a gúla negyedik csúcsát D-vel. Bocsássunk D-ből merőlegest az AB, BC, CA oldalakra és az alapsíkra, a talppontok rendre E, F, G és O (1. ábra).

1984-03-115-2.eps

1. ábra

A DOE, DOF, DOG derékszögű háromszögekben az E-nél, F-nél, G-nél található hegyesszög az oldallapoknak az alapsíkkal bezárt szöge. Tudjuk ugyanis, hogy két sík hajlásszögét a metszésvonaluk egy pontjába a síkokon belül állított merőleges egyenesek szöge méri, és például DE és OE is merőleges AB-re (ez a „három egymásra merőleges egyenes" néven ismert tételből adódik). Ezek a szögek tehát a feltétel alapján mind β-val egyenlők, továbbá a háromszögek DO befogója közös, következésképpen a DOE, DOF, DOG háromszögek egybevágók, és így $OE=OF=OG$. Az O pont tehát az ABC háromszög beírt körének középpontja.

Válasszunk az AD élen egy tetszőleges P pontot. P-ben állítsunk merőlegest AD-re az ABD és ACD síkokban, messék ezek az AB, ill. AC egyeneseket a P_1, ill. P_2 pontokban. Az ABD és ADC síkok hajlásszöge definíció szerint a PP_1 és PP_2 félegyenesek szöge, azaz a PP_1P_2 háromszög P csúcsánál levő szög.

Ezek után a szerkesztést a következőképpen végezhetjük el. Felveszünk a, gúla alapjához hasonló ABC derékszögű háromszöget. Ezt megtehetjük, hiszen az ABC háromszög egyik hegyesszöge, α, adott. Megszerkesztjük a beírt kör O középpontját és O-nak az oldalakra eső E, F, G vetületét (2. ábra).

1984-03-116-1.eps

2. ábra

A DOE derékszögű háromszögnek most már ismerjük az OE befogóját és a $DEO\sphericalangle=\beta$ szögét. A $DE=DF=DG$ átfogó, mely egyúttal az oldallapok magasságvonala, könnyen szerkeszthető. Az oldallapokon a D-ből induló magasságvonalak talppontjai az E, F ill. G pontok, így az ABD és ACD oldallapok $ABD^{'}$ és $ABD^{''}$ leforgatottjait megszerkeszthetjük. Végül AD-n (melynek ábránkon két példánya szerepel) tetszőlegesen felvesszük a P pontot, azaz $AD^{'}$-n egy $P^{'}$ és $AD^{''}$-n egy $P^{''}$ pontot úgy, hogy $AP^{'}=AP^{''}$ legyen. Az $ABD^{'}$ háromszögben $P^{'}$-nél merőlegest állítunk $AD^{'}$-re, ez az AB oldalt P_1-ben metszi; az $ACD^{''}$ háromszögben az $AD^{''}$-re $P^{''}$-ben emelt merőleges AC-t P_2-ben metszi. Végül vesszük azt a PP_1P_2 háromszöget, melynek oldalai P_1P_2, $P^{'}P_1$ és $P^{''}P_2$; ennek P-nél levő szöge az ABD és ACD lapok szöge.

A másik két oldallap hajlásszöge hasonlóan szerkeszthető.

Az α és β szögeknek hegyesszögeknek kell lenniük. Ezzel a megszorítással a kérdéses gúla létezik, és az (tükrözéstől és középpontos hasonlóságtól eltekintve) egyértelmű. Így a szerkesztést mindig végre lehet hajtani, és az – könnyen ellenőrizhető módon – helyes eredményt ad.

Megjegyzések. **1**. A megoldásban nem használtuk ki, hogy a gúla alaplapja derékszögű háromszög, a szerkesztés tetszőleges alap esetén hasonlóan elvégezhető.

2. Belátható, hogy a PP_1P_2 háromszög mindig egyenlő szárú. A P pont megfelelő megválasztásával elérhető, hogy a P_1 pont E-vel, a P_2 pedig G-vel essen egybe. Így a szerkesztést a következőképpen is be lehet fejezni. A $D^{'}$ és $D^{''}$ pontok szerkesztése után E-ből $AD^{'}$-re, G-ből $AD^{''}$-re állítunk merőlegest, a talppontok legyenek $P^{'}$, ill. $P^{''}$ (3. ábra).

1984-03-117-1.eps

3. ábra

Az E középpontú, $EP^{'}$ sugarú és a G középpontú, $GP^{''}=EP^{'}$ sugarú körök metszéspontja P. Az ABD és ACD lapok hajlásszöge megegyezik az EPG szöggel.