Jelöljük a trapéz csúcsait A, B, C, D-vel úgy, hogy $AB||CD$ és $AB\geq CD$. Az A csúcs elhagyása után maradt BCD háromszög magasságpontját jelölje $A^{'}$, a B elhagyásával kapott ACD háromszög magasságpontját $B^{'}$, és így tovább. Azt kell tehát igazolnunk, hogy $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ négyszög trapéz.

Először azt az esetet vizsgáljuk, mikor $AB>CD$. Legyen az AD, BC egyenesek metszéspontja E. Az ABE és DCE háromszögek hasonlóak. Jelölje M_1 az $AD^{'}$ és $BC^{'}$ egyenesek metszéspontját, M_2 pedig a $CB^{'}$ és $DA^{'}$ egyenesekét, $AD^{'}\perp BE$, valamint $BC^{'}\perp AE$ miatt M_1 az ABE háromszög magasságpontja, hasonlóan M_2 a CDE háromszög magasságpontja. Az M_1, M_2 és E pontok tehát egy egyenesen vannak és ez az egyenes merőleges AB-re. Ugyancsak merőlegesek AB-re az $AB^{'}$, $C^{'}D$, $CD^{'}$ és $A^{'}B$ egyenesek is, mert vagy egy AB vagy egy CD alapú háromszög magasságvonalai. Így ezek az egyenesek párhuzamosak egymással. Párhuzamosak egymással a BM_1 és CM_2, valamint az AM_1 és DM_2 egyenesek: az első kettő az AD, a második kettő pedig a BC egyenesre merőleges (1. ábra).

1984-03-114-1.eps

Messe a BM_1 magasságvonal az $AB^{'}$-t $C^{''}$-ben. Az $M_1M_2B^{'}C^{''}$ négyszög szemben fekvő oldalai az előzőek alapján párhuzamosak egymással, ez a négyszög tehát paralelogramma. Hasonlóan kapjuk, hogy $M_1M_2A^{'}D^{''}$ is paralelogramma, ahol $D^{''}$ az AM_1, valamint $A^{'}B$ metszéspontja. Következésképpen $B^{'}C^{''}$ és $A^{'}D^{''}$ párhuzamos és egymással egyenlő szakaszok (mindketten párhuzamosak és egyenlők M_1M_2-nel), tehát $A^{'}B^{'}C^{''}D^{''}$ is paralelogramma – speciálisan $A^{'}B^{'}||C^{''}D^{''}$.

Tudjuk, hogy az EM_1, $DC^{'}$ és $AC^{''}$ egyenesek párhuzamosak. Így az M_1 középpontú, $\lambda=\dfrac{ED}{EA}$ arányú nagyításban $C^{'}$ képe $C^{''}$ lesz. Hasonlóan, az M_1 középpontú, $\lambda^{'}=\dfrac{EC}{EB}$ arányú nagyításban $D^{'}$ képe $D^{''}$ lesz. Az AEB és DEC háromszögek hasonlók, tehát

$$\frac{M_1C^{'}}{M_1C^{''}}=\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{M_1D^{'}}{M_1D^{''}}.$$

Az első és utolsó tagot összevetve láthatjuk, hogy azok éppen az $M_1C^{'}D^{'}$ és $M_1C^{''}D^{''}$ háromszögek hasonlóságát mondják ki, ezért $C^{'}D^{'}||C^{''}D^{''}$.

Az előbb viszont láttuk, hogy $A^{'}B^{'}||C^{''}D^{''}$, amiből következik, hogy $C^{'}D^{'}||A^{'}B^{'}$, azaz a négyszög trapéz.

1984-03-115-1.eps

Végül ha $AB=CD$, akkor a trapéz paralelogramma (2. ábra). A paralelogramma középpontosan szimmetrikus az átlóinak metszéspontjára. Ebből következik, hogy az $A^{'}$, $B^{'}$, $C^{'}$, $D^{'}$ magasságpontok ugyancsak szimmetrikusan helyezkednek el az átlók metszéspontjára, de akkor ezek is paralelogrammát határoznak meg. Ezzel az állítást igazoltuk.