Ha úgynevezett hurkolt sokszögeket is megengedünk, amelyekben az oldalak csúcsoktól különböző pontokban is metszik egymást – akkor a feladat állítása nem igaz. Az 1. ábrán látható nyolcszög szögei 90°-osak, oldalai pedig: $AB=4$, $BC=8$, $CD=3$, $DE=7$, $EF=1$, $FG=5$, $GH=2$, $HA=6$.

1984-02-071-1.eps

1. ábra

A feladat állítását azzal a pótlólagos feltétellel igazoljuk, hogy a sokszög konvex. Tegyük fel tehát, hogy létezik a feltételeknek eleget tevő nyolcszög. Az egyenlő szögeket jelölje α, az oldalakat pedig a_1, a_2, $\ldots$, a_8. Ismeretes, hogy egy konvex nyolcszög szögeinek összege $6\cdot 180^\circ=1080^\circ$, így $\alpha=\dfrac{1080^\circ}{8}=135^\circ$. Tehát a nyolcszög köré egy $ABCD$ téglalap írható oly módon, hogy az a_1, a_3, a_5, a_7 oldala a téglalap AB, BC, CD, DA oldalaira esnek (2. ábra).

1984-02-071-2.eps

2. ábra

A téglalap AB és CD oldalát – melyekről tudjuk, hogy egyenlő hosszúak – a nyolcszög oldalaival kifejezve kapjuk, hogy
$$a_1+(a_2+a_8)\frac{\sqrt2}{2|}=a_5+(a_6+a_4)\frac{\sqrt2}{2}.$$
Ezt átrendezve adódik, hogy
$$\sqrt2=\frac{a_6+a_4-a_2-a_8}{a_1-a_5},$$
ahol a nevező nem 0, mert a_1 és a_5 feltétel szerint különbözők. Azt kaptuk, hogy $\sqrt2$ előáll két egész szám hányadosaként, ami ellentmond $\sqrt2$ irracionális voltának. Tehát valóban nem létezik a kérdéses nyolcszög.

Megjegyzések. 1. A fenti gondolatmenet ugyanúgy alkalmazható, ha az oldalakról csak azt tesszük fel, hogy hosszaik különböző racionális számok.

2. Az is könnyen belátható, hogy ha egy konvex nyolcszög szögei egyenlők és oldalai hossza racionális, akkor a párhuzamos oldalak egyenlő hosszúak.

3. Általában akkor és csak akkor létezik olyan konvex n-oldalú sokszög, melynek szögei egyenlők, oldalai pedig valamilyen sorrendben $1, 2, 3, \ldots, n$ egységnyi hosszúak, ha n nem egy prímszám hatványa.