I. megoldás. Rajzoljuk meg az ABC derékszögű háromszöget, melyben a befogók $AC=3$ és $BC=4$ egység hosszúak. Állítjuk, hogy a keresett kör sugara 2 egység. Ennek bizonyításához nyilván elegendő megmutatni, hogy az a 2 egység sugarú kör, ami érinti az AC és BC oldalakat, egyúttal érinti az ABC háromszög körülírt körét is. A körülírt kör középpontja az AB oldal F felezőpontja, sugara pedig

$$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{AC^2+BC^2}}{2}=2{,}5$$

egység. k akkor és csak akkor érinti belülről a körülírt kört, ha a két kör középpontjának távolsága $2{,}5-2=0{,}5$ egység.

1984-02-067-1.eps

1. ábra

Mivel k érinti AC-t és BC-t is, azért az O középpont mindkettőtől 2 távolságra van. Következésképp O rajta van BC-nek OD felező merőlegesén, és $OD=2$. Az F pont, mint az ABC háromszög körülírt körének középpontja, szintén rajta van OD-n, és $FD=AC/2=1{,}5$, mert FD középvonal az ABC háromszögben. Következésképp

$$OF=OD-FD=2-1{,}5=0{,}5,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. A feladatot általában oldjuk meg. A keresett k kör sugara legyen r, középpontja O. Az O pont r távolságra van AC-től és BC-től is.

1984-02-067-2.eps

2. ábra

Bocsássunk AB-nek F felezőpontjából merőlegeseket AC-re, BC-re, a talppontok legyenek E, ill. D (2. ábra). Ezek felezik a megfelelő oldalakat, ezért az OMF derékszögű háromszögre Pitagorász tétele szerint

$$OF^2=OM^2+MF^2=(r-EC)^2+(CD-r)^2=\left(r-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-r\right)^2.$$

k akkor és csak akkor érinti belülről a körülírt kört, ha $OF=AF-r=c/2-r$. Ebből r-re a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{c}{2}-r\right)^2=\left(r-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}-r\right)^2,$$

ahonnan $a^2+b^2=c^2$ felhasználásával

$$r\big(r-(a+b-c)\big)=0.$$

Mivel $r\neq 0$, azért a keresett kör sugara $r=a+b-c$. Esetünkben $a=3$, $b=4$, $c=5$, tehát $r=3+4-5=2$.