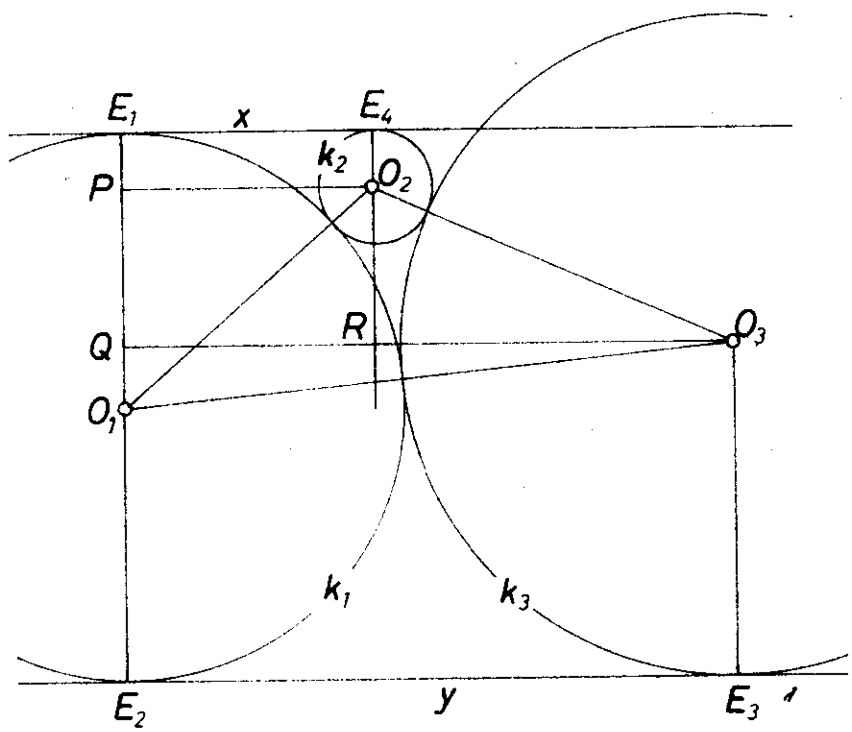
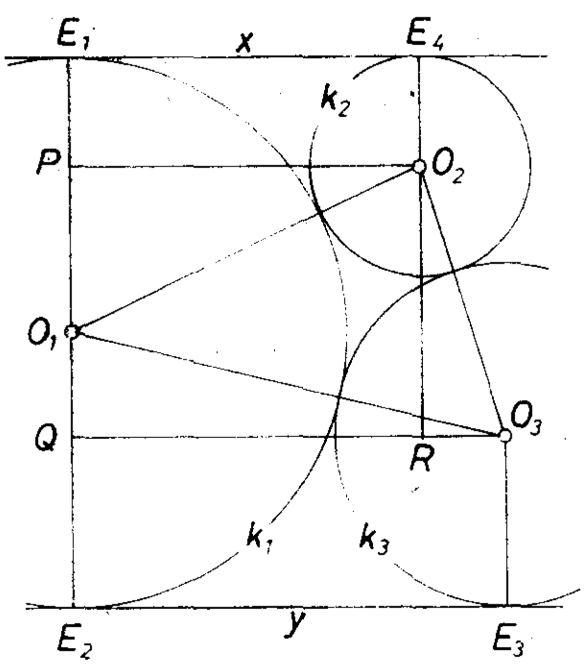
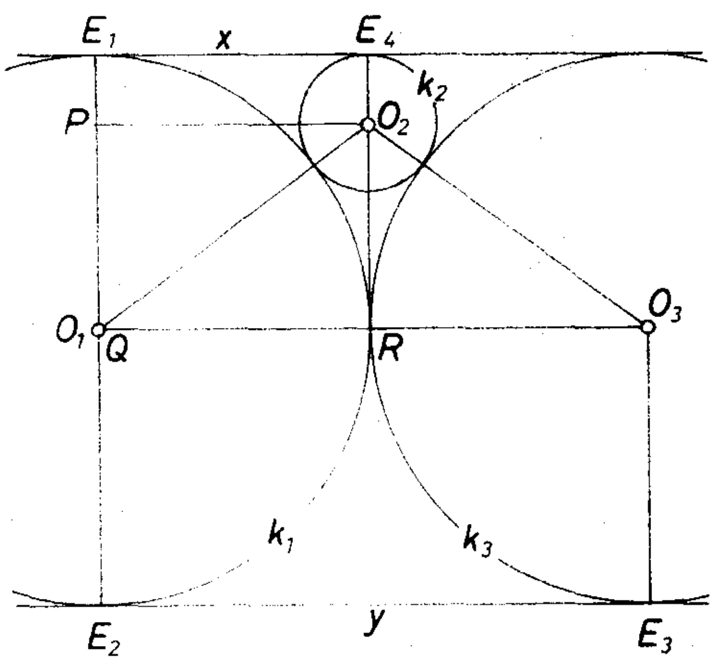
Legyen E_1 és E_2 a két párhuzamos érintőnek a k_1 körrel közös pontja. A feladat feltételeiből következik, hogy a további érintési pontok az E_1E_2 egyenesnek ugyanarra a partjára esnek. Jelölje a k_2 körnek és az E_1-ben húzott érintőnek a közös pontját E_4, k_3 és az E_2-ben húzott érintő érintési pontját E_3. Legyen továbbá O_i a k_i középpontja ($i = 1, 2, 3$); O_2-nek az E_1E_2-re való merőleges vetülete P, O_3 vetülete E_1E_2-re Q, és O_2 vetülete QO_3-ra R, $E_1E_4 = x$ és $E_2E_3 = y$.



Az $r_2 \leqq r_3$ választása mellett a körök háromféleképpen helyezkedhetnek el, aszerint, hogy $r_3 > r_1$, $r_3 < r_1$, ill. $r_3 = r_1$. Mindhárom esetben létrejönnek az O_1PO_2, O_1QO_3, O_2RO_3 (esetleg elfajuló) derékszögű háromszögek.





Felhasználva, hogy egymást kívülről érintő körök középpontjait összekötő egyenes áthalad a közös érintési ponton, és a középpontok távolsága a körök sugarának összege, e három háromszögre felírhatjuk Pitagorasz tételét:

(1) $$(r_1+r_2)^2 = x^2 + (r_1-r_2)^2,$$
(2) $$(r_1+r_3)^2 = y^2 + (r_1-r_3)^2,$$
(3) $$(r_2+r_3)^2 = (y-x)^2 + (2r_1-r_2-r_3)^2,$$

Az (1) összefüggésből $x = 2\sqrt{r_1 r_2}$, (2)-ből $y = 2\sqrt{r_1 r_3}$. Ezeket (3)-ba helyettesítve

$$(r_2+r_3)^2 = (2\sqrt{r_1 r_3} - 2\sqrt{r_1 r_2})^2 + 4r_1^2 - 4r_1(r_2+r_3) + (r_2+r_3)^2,$$

ahonnan $4r_2r_3 = r_1^2$. Ezt akartuk bizonyítani.

Bangha Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján