

Egy térbeli egybevágósági transzformációt egyértelműen meghatároz 4, nem egy síkra illeszkedő pont és azok képpontjai. Legyen az egyik pont P , és válasszunk tetszőlegesen 3 másikat, A -t, B -t, C -t úgy, hogy P, A, B és C ne essenek egy síkra. Jelöljük A, B, C képeit az adott transzformációra nézve A^*, B^*, C^* -gal. Mivel egybevágósági transzformációról van szó, bármely két pont távolsága megegyezik a képpontok távolságával, speciálisan $PA = PA^*, PB = PB^*, AB = A^*B^*$ stb.

Az előrebocsátottak értelmében elegendő három, P -n átmenő síkot találnunk úgy, hogy az A, B, C pontokat ezekre a síkokra egymás után tükrözve rendre az A^*, B^*, C^* pontokat kapjuk.

Az első, S_1 sík legyen az AA^* szakasz felező merőleges síkja. Mivel $PA = PA^*$, azért ez a sík tartalmazza a P pontot. (Ha $A = A^*$ akkor, tetszőleges A -t és P -t tartalmazó síkot felvehetünk.) S_1 -re tükrözve a pontokat, A képe A^*, P képe saját maga, B és C képe legyen B_1 , ill. C_1 . Mivel a tükrözés távolságtartó, azért $B_1A^* = BA = B^*A^*$, és $B_1P = BP = B^*P$. Ez pedig azt jelenti, hogy a B_1B^* felező merőleges síkján, S_2 -n rajta van az A^* és a P pont is. Ezt választva második síknak, A -nak a kétszeri tükrözés utáni képe továbbra is A^* (hiszen A^* rajta van S_2 -n), B -nek a kétszeri tükrözés utáni képe pedig B^* , mert B_1 -et S_2 -re tükrözve B^* -ot kapjuk. (Ha $B_1 = B^*$ volna, S_2 -nek megfelel az a sík, amely P -t, A^* -ot és B^* -ot tartalmazza – ez a három pont nem lehet egy egyenesen!) Jelöljük C_1 -nek S_2 -re való tükröképét C_2 -vel. Ha most $C_2 = C^*$, készen vagyunk: először az S_1 -re, majd az S_2 -re való tükrözés után az A, B, C pontokból A^*, B^*, C^* -ot kaptuk. Így a megadott transzformációt két síkra való tükrözés egymásutánjaként állítottuk elő.

Ha viszont $C_2 \neq C^*$, akkor $C_2B^* = C_1B_1 = CB = C^*B^*$, $C_2A^* = C_1A^* = CA = C^*A^*$, és persze $C_2P = CP = C^*P$, hiszen az S_2 és S_1 síkokra való tükrözés távolságtartó. Így C_2 és C^* egyenlő távolságra van B^* -tól, A^* -tól és P -tól, tehát tükrös helyzetűek az $S_3 = PA^*B^*$ síkra nézve. Ebben az esetben a megadott transzformációt az S_1, S_2, S_3 síkokra való egymás utáni tükrözéseként állítottuk elő.

Barsi Sándor (Tata, Eötvös J. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Az S_1, S_2, S_3 síkok nem egyértelműek: ugyanazt a transzformációt nagyon sokféleképpen lehet felbonítani síkokra való tükrözésre.