Az egyenlőtlenség átírható a következő ekvivalens formába:

$$2abc(a+b+c) \leqq ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) \leqq 2(a^4+b^4+c^4). \tag{1}$$

Jelöljük a bal oldalon álló kifejezést B-vel, a középsőt K-val, a jobb oldalit J-vel. Elsőként a $B \leqq K$ egyenlőtlenséget bizonyítjuk.

$$\begin{aligned} K &= ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2)= \\ &= a(b^3+c^3)+b(c^3+a^3)+c(a^3+b^3)= \\ &= a(b+c)(b^2-bc+c^2)+b(c+a)(c^2-ca+a^2)+c(a+b)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

Az $x^2-xy+y^2 \geqq xy$ egyenlőtlenség az $(x-y)^2 \geqq 0$ egyenlőtlenség egy másik alakja. Mivel a, b, c pozitívak, az egyes tagokban az utolsó tényezőt bc, ca, ab-vel helyettesítve a kifejezést nem növeljük.

$$K \geqq a(b+c)bc+b(c+a)ca+c(a+b)ab = 2abc(a+b+c) = B.$$

A $K \leqq J$ bizonyításához többször is felhasználjuk az ugyancsak $(x-y)^2 \geqq 0$-ból adódó $xy \leqq \dfrac{x^2+y^2}{2}$ egyenlőtlenséget.

$$\begin{aligned} K = ab(a^2+b^2)+bc(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) \leqq \frac{a^2+b^2}{2}(a^2+b^2)+\frac{b^2+c^2}{2}(b^2+c^2)+\frac{c^2+a^2}{2}(c^2+a^2)= \\ = a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leqq a^4+b^4+c^4+\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2} = 2(a^4+b^4+c^4) = J. \end{aligned}$$

Ezzel a bizonyítandó egyenlőtlenségeket igazoltuk. Azt is láthatjuk, hogy mindkét esetben egyenlőség csak az $a=b=c$ esetben áll.

Megjegyzés. A megoldásban alkalmazott módszerrel bizonyítható az (1) egyenlőtlenség következő általánosítása is. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok, akkor

$$\frac{2}{n-2} \sum_{1 \leqq i<j<k \leqq n} a_i a_j a_k (a_i+a_j+a_k) \leqq \sum_{1 \leqq i<j \leqq n} a_i a_j (a_i^2+a_j^2) \leqq (n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^4,$$

$n=3$-ra éppen (1)-et kapjuk vissza.

Bencze Mihály, Brassó