

A táblázat bármelyik mezőjéről bármelyik másikra eljuthatunk legfeljebb $2n-2$ lépésben úgy, hogy minden lépésben egy mezőről valamelyik szomszédjára lépünk. Mivel a szomszédos mezőkbe írt számok különbsége legfeljebb 1, így a táblázatba írt számok maximumának és minimumának különbsége legfeljebb $2n-2$. Ez azt jelenti, hogy a táblázatban legfeljebb $2n-1$ különböző szám szerepel.

Ebből következik, hogy a táblázatba írt n^2 darab szám közt van olyan, amelyik legalább $\left\lceil \frac{n^2}{2n-1} \right\rceil$ helyen szerepel.

Mivel pedig

$$\frac{n^2}{2n-1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}, \quad \text{így} \quad \left\lceil \frac{n^2}{2n-1} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Van tehát olyan szám, amiből legalább $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ darab van a táblázatban.

Megjegyzések. 1. A fentieknél jóval több igaz. Azt állítjuk, hogy vagy van olyan szám, amelyik minden sorban szerepel, vagy pedig olyan, amelyik a táblázat minden oszlopában előfordul. Van tehát olyan szám, amelyik legalább n -szer szerepel.

Jelölje ugyanis az i -edik sorban levő számok minimumát m_i , maximumát pedig M_i . Ha $m_i \leq a_i \leq M_i$, akkor a_i szerepel az i -edik sorban, hisz m_i és M_i előfordul itt, és közöttük a szomszédos mezőkön legfeljebb eggyel változnak a számok.

Ebből következik, hogy ha van olyan a , amelyre $m_i \leq a \leq M_i$, minden i -re, akkor a minden sorban szerepel.

Ha nincs ilyen a , akkor az $[m_i; M_i]$ $i = 1, 2, \dots, n$ zárt intervallumok közös része üres. Könnyű belátni, hogy ha egy egyenesen véges sok zárt intervallum közül bármely kettőnek van közös pontja, akkor az intervallumok közös része nem üres. Így ha az $[m_i; M_i]$ intervallumoknak nincs közös eleme, akkor van köztük kettő, amelyeknek szintén nincs közös eleme. Van tehát olyan i és j , hogy $m_i \leq M_i < m_j \leq M_j$.

Ez azt jelenti, hogy ha $M_i \leq b \leq m_j$, akkor az i -edik sor minden eleme legfeljebb b , a j -edik sorban pedig minden elem legalább b . Bármelyik oszlop mentén haladva jutunk tehát el az i -edik sorból a j -edikbe, át kell haladnunk olyan mezőn, amelyikben b szerepel, hisz a szomszédos mezőkbe írt számok eltérése legfeljebb 1. Így a b szám minden oszlopban szerepel.

Valóban van tehát olyan szám, amely legalább n -szer fordul elő a táblázatban.

Ennél többet már nem mondhatunk, hiszen egy olyan táblázatban, ahol az i -edik sor minden eleme i ($i = 1, 2, \dots, n$) nyilván teljesülnek a feltételek, és minden felírt szám pontosan n -szer fordul elő.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

2. Az előzők közvetlen következménye az alábbi érdekes tétel: Egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe tetszőlegesen beírjuk az 1-től n^2 -ig terjedő egész számokat. Akárhogyan tesszük is ezt, mindig található két olyan közös élű mező, melyekbe írt számok különbsége legalább n .

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, vagyis a szomszédos mezőkbe írt számok eltérése legfeljebb $(n-1)$. Osszuk el a táblázat mezőiben álló számokat $(n-1)$ -gyel, és írjuk vissza a hányados egész részét. Ekkor egyrészt minden szám legfeljebb $(n-1)$ -szer szerepel, másrészt a szomszédos mezőkben álló számok között legfeljebb 1 a különbség. Ez pedig ellentmond az előbb bizonyított állításnak.