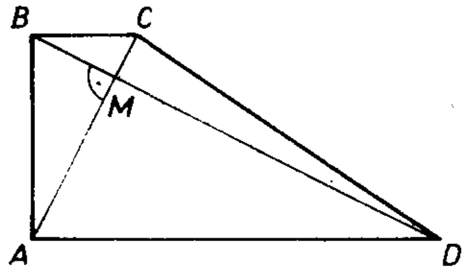
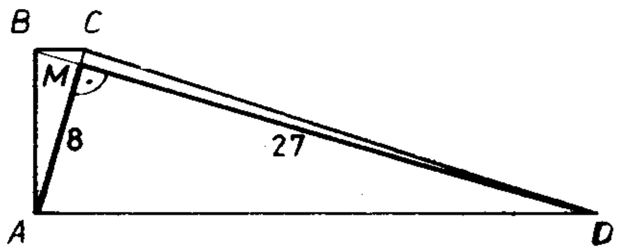
Legyenek a trapéz párhuzamos oldalai AD és BC, a derékszögű csúcsok A-nál, ill. B-nél (1. ábra).



1. ábra

Az MA, MB, MC, MD szakaszok közül adott kettő. Négy szakasz közül kettőt 12-féleképpen lehet kiválasztani – így tulajdonképpen 12 szerkesztési feladatot kell megoldanunk attól függően, melyik két szakasz hosszát tekintjük megadottnak.

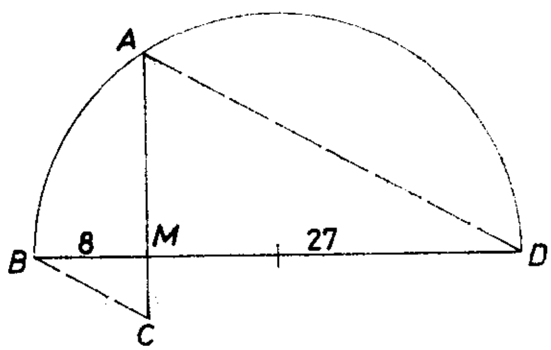
1. Az adott szakaszok az AMD, AMB vagy BMC derékszögű háromszögek valamelyikének befogói. Ekkor megszerkesztjük a háromszöget, majd az átfogóra végpontjából merőlegest állítunk. Így megkapjuk a trapéz merőleges szárát (vagy párhuzamos alapjait). A befogók meghosszabbításain könnyen megszerkeszthetjük a hiányzó csúcsokat (2. ábra).



2. ábra

A szerkesztés mindig végrehajtható, egyértelmű, és nyilvánvalóan megfelelő trapézt eredményez. Mivel az adatokat 6-féleképpen vehetjük fel, 6 trapézt kapunk.

2. Az adott szakaszok a trapéz egy átlóján vannak – mondjuk $MB = 8$, $MD = 27$. Felvesszük a BD átlót, és e fölé Thalész-kört szerkesztünk. A BD-re M-ben állított merőleges metszi ki a körből az A csúcsot. Az AM egyenesnek és a B-ben AB-re állított merőlegesnek metszéspontja C (3. ábra).



3. ábra

Hasonló a szerkesztés a többi három esetben is – így összesen 4 további trapézt kapunk.

3. Végül az az eset maradt hátra, mikor az adott szakaszok a CMD derékszögű háromszög befogói. Az ABC, illetve ABD derékszögű háromszögekben BM, ill. AM a derékszögű csúcsból induló magasság, ezért

(1) $$BM^2 = AM \cdot MC, \qquad AM^2 = BM \cdot MD.$$

Ezekből meghatározhatjuk pl. a BM szakasz hosszát:

(2) $$BM^3 = MC^2 \cdot MD,$$

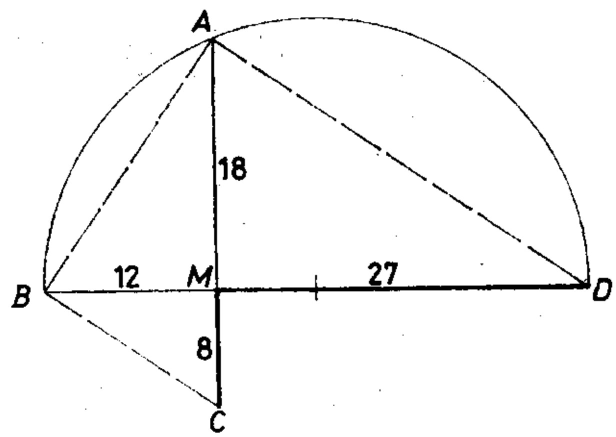
ami MC és MD ismeretében kiszámítható. Aszerint, hogy melyiket választjuk 8-nak, ill. 27-nek, BM-re két különböző értéket kapunk:

$$MC = 8, \qquad MD = 27 \qquad BM = \sqrt[3]{8^2 \cdot 27} = 12;$$
$$MC = 27, \qquad MD = 8, \qquad BM = \sqrt[3]{27^2 \cdot 8} = 18.$$

Most már a BM és MD távolságok ismeretében – például a 2-ben leírtak alapján – a trapézt megszerkeszthetjük. A kapott trapéz megfelelő lesz, amit ismét a magasságtétel alkalmazásával láthatunk be. Ha például $BM = 12$ és $MD = 27$, a megszerkesztett trapézban ABC és ABD derékszögű háromszögek (4. ábra), tehát (1) és ezzel együtt (2) is érvényes. Tehát

$$MC^2 = \frac{BM^3}{MD} = \frac{12^3}{27} = 64,$$

az MC távolság valóban 8.



4. ábra

Ezzel mind a 12 szerkesztési feladatot megoldottuk. Eredményül 12 különböző trapézt kaptunk, melyek 6 párba oszthatók. Az egy párban levők egymásból az A és B, valamint C és D csúcsok felcserélésével kaphatók meg.

Megjegyzés. Az 1. és 2. esetben a szerkesztés tetszőleges adatok mellett elvégezhető, a 3. esetben már nem. Például, ha $MC = 1$ és $MD = 2$ egység, a trapéz nem szerkeszthető. Ha mégis meg tudnánk szerkeszteni, akkor $BM = \sqrt[3]{2}$ miatt egy $\sqrt[3]{2}$ hosszú szakaszt is szerkesztettünk volna - ami pedig nem lehetséges.