(1) $$2s_a > \sqrt{a(8s-9a)},$$

Megoldás. Felhasználjuk, hogy az a oldalhoz tartozó súlyvonal hossza a szokásos jelölésekkel

$$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}.$$

Ez például a Pitagorasz tétel segítségével bizonyítható. (Lásd Horvay K.–Reiman I.: Geometriai feladatok gyűjteménye I., 1673. feladat.) Ezt és a $2s = a+b+c$ összefüggést (1)-be helyettesítve kapjuk, hogy

(2) $$\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} > \sqrt{a(4b+4c-5a)}.$$

A bal oldali gyök alatt álló kifejezés biztosan pozitív. A jobb oldal azonban csak akkor értelmes, ha

(3) $$4b+4c-5a \geqq 0.$$

E feltétel mellett (2) mindkét oldalát négyzetre emelhetjük:

$$2b^2+2c^2-a^2 > 4ab+4ac-5a^2,$$

azaz

(4) $$2(b-a)^2+2(c-a)^2 > 0.$$

A keresett háromszögek tehát azok, melyekben az oldalakat tudjuk úgy csoportosítani, hogy (3) és (4) egyaránt teljesüljön.

Akárhogyan is csoportosítjuk az oldalakat, (4) biztosan nem teljesül, ha a háromszög szabályos. Ha viszont a háromszög nem szabályos, az oldalakat bárhogyan is csoportosítjuk, (4) igaz lesz. Így a nem szabályos háromszögek közül azokat kell megkeresnünk, melyekben az oldalak megfelelő csoportosításával (3), azaz

$$4(b-a)+(c-a)+3c \geq 0$$

teljesül. Ez pedig biztosan így van, ha a a háromszög (egyik) legrövidebb oldala. Ekkor ugyanis $b-a \geq 0$ és $c-a \geq 0$, és nem–negatív mennyiségek összege is nem–negatív.

Végeredményben tehát a szabályos háromszöget kivéve minden háromszögben van olyan „a” oldal – nevezetesen a legrövidebb –, hogy a hozzá tartozó s_a súlyvonalra teljesül az (1) egyenlőtlenség.

Kiszel István (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)