I. megoldás. Mivel minden nem–negatív egész n-re $f(n)$ eleme az f függvény értelmezési tartományának, azért mind az a), mind a b) esetben f csak nem–negatív egész értékeket vehet fel.

a) Tegyük fel, hogy létezik ilyen f, és legyen $f(0)=a$. Ekkor a feltételt rendre a 0, a, 1, $a+1$, 2, $a+2$, $\dots$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{array}{rcl}
f(a)=f\big(f(0)\big)=1, & \longrightarrow & f(1)=f\big(f(a)\big)=a+1,\\
 & \swarrow & \\
f(a+1)=f\big(f(f(1)\big)=2 & \longrightarrow & f(2)=f\big(f(a+1)\big)=a+2,\\
\vdots & \swarrow & \vdots\\
 & \swarrow & \\
f(a+a-1)=f\big(f(a-1)\big)=a, & \longrightarrow & f(a)=f\big(f(a+a-1)\big)=a+a.
\end{array}$$

Így egyrészt $f(a)=1$, másrészt $f(a)=a+a$, ami lehetetlen, hiszen a nem–negatív egész. Így az a) esetben a kérdéses függvény nem létezik.

b) Ilyen függvény viszont van, például az a függvény, amit a következőképpen definiálunk:

$$f(0)=0,$$
$$f\big(2^k(4m+1)\big)=2^k(4m+3),$$
$$f\big(2^k(4m+3)\big)=2^{k+1}(4m+1).$$

Mivel minden pozitív egész egyértelműen írható föl 2^kp alakban, ahol p páratlan, k pedig nem–negatív egész, azért f-et valóban (egyértelműen) megadtuk. Ez az f teljesíti a b) feltételt:

Ha n=0, akkor $f\big(f(0)\big)=f(0)=0=2\cdot 0$,
Ha $n=2^k(4m+1)$ alakú, akkor $f\big(f(n)\big)=f\big(2^k(4m+3)\big)=2^{k+1}(4m+1)==2n$.

Végül ha $n=2^k(4m+3)$ alakú, akkor
$$f\big(f(n)\big)=f\big(2^{k+1}(4m+1)\big)=2^{k+1}(4m+3)=2n.$$
Több eset nincs, a feladatot megoldottuk.

II.megoldás. a b) feladatra. Meghatározzuk az összes, a feltételeket kielégítő f függvényt. Először is, f különböző helyeken nem vehet fel azonos értékeket. Ugyanis ha $f(a)=f(b)$, akkor

$$2a=f\big(f(a)\big)=f\big(f(b)\big)=2b$$

alapján $a=b$.

Másodszor, $f(0)=0$. Valóban, ha $f(0)=a$, akkor $f(a)=f\big(f(0)\big)=2\cdot 0=0$, így

$$a=f(0)=f\big(f(a)\big)=2a,$$

amiből $a=0$. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy f a pozitív egész helyeken pozitív egész értékeket vesz föl.

A $2n=f\big(f(n)\big)$ feltételt kétszer alkalmazva

$$f(2n)=f\big(f(n)\big)=2f(n), \tag{1}$$

tehát elegendő f értékét a páratlan helyeken megadnunk, azokból a páros helyeken felvett értékek (1) ismételt alkalmazásával adódnak.

Legyen most $p\ge 1$ egy páratlan szám. Ha $f(p)=q$ páratlan, mondjuk azt, hogy a p *párja* q, s ekkor $f(q)=f\big(f(p)\big)=2p$. Ha pedig $f(p)$ páros, mondjuk $f(p)=2q$, akkor (1) szerint

$$2f(q)=f(2q)=f\big(f(p)\big)=2p,$$

azaz $f(q)=p$. Mivel (1) alapján f páros helyeken páros értékeket vesz fel, és $f(q)$ páratlan, azért q is páratlan, és q-nak a párja p. Így minden páratlan szám valamelyik párnak vagy első, vagy második tagja, s természetesen egyetlen szám sem lehet egyszerre két párban.

Így ha f teljesíti a b)-ben előírt követelményt, akkor a pozitív páratlan egészek feloszthatók olyan $(p_0,\ q_0)$; $(p_1,\ q_1)$; $\dots$ párokba, hogy (mindjárt (1)-et is felhasználva)

$$f(0)=0,$$
$$f(2^kp_i)=2^kq_i;\quad f(2^kq_i)=2^{k+1}p_i \tag{2}$$

(i, k nem–negatív egészek).

Fordítva, akárhogyan is osztjuk párokba a pozitív páratlan egészeket, a (2) által definiált f függvény teljesíti az $f\big(f(n)\big) = 2n$ összefüggést.

Ezzel leírtuk az összes megfelelő függvényt. Az előző megoldásban megadott függvény a $p_k = 4k + 1$, $q_k = 4k + 3$ párbaosztásból adódik.

Megjegyzés. A feladatot nagyon sokan félreértették, ugyanis megfeledkeztek arról, hogy f mindkét esetben csak egész számokon van értelmezve, és így $f(n)$-nek is egésznek kell lennie. Ez zárja ki a kézenfekvő $n + 1/2$, illetve $\sqrt{2n}$ megoldásokat.