

Megadunk egy jó elrendezést:

a dobozok sorszáma	1	2	3	4	5	6	7	8
a golyók száma	1	1	3	4	2	4	6	8

Ha minden lépésben a legkisebb sorszámú kiüríthető dobozból vesszük ki a golyókat, akkor a táblázat mutatja, hogy az egyes lépések során hányas számú dobozt kell kiürítenünk. Látható, hogy a 29-edik lépés után valamennyi golyó az urnába kerül.

*Megjegyzés.* A fenti megoldást sokan megtalálták, többen igazolták azt is, hogy ez az egyetlen. Számos dolgozatból hiányzott azonban, hogy a dobozok kiürítése valóban megvalósítható.

A táblázat elkészítése és nyomon követése már itt is elég fáradságos, több golyó esetén pedig még inkább az volna. Az alábbi gondolatmenet úgy ad módszert a megfelelő elrendezés elkészítésére, hogy egyúttal annak helyességét is bizonyítja.

Ha  $S_i$  jelöli az  $i$ -nél nem kisebb sorszámú dobozokban levő golyók számának összegét egy tetszőleges doboz kiürítése előtt,  $s_i$  pedig a doboz kiürítése után, akkor  $S_i - s_i$  értéke 0 vagy  $i$  aszerint, hogy az éppen kiürített doboz sorszáma kisebb-e, mint  $i$  vagy sem. Mivel az eljárás végén egyetlen dobozban sem maradhat golyó, kapjuk, hogy  $S_i$  kezdeti értékeire fenn kell álljon, hogy minden  $i$ -re  $i|S_i$ . Másrészt nyilván teljesülnie kell, hogy egyetlen dobozban sem lehet több golyó, mint a doboz sorszáma, vagyis a fenti jelöléssel  $S_{i+1} - S_i \leq i$  minden  $i$ -re.

Vegyük észre, hogy ez a két feltétel már meghatározza az  $i$ -edik doboz kezdeti tartalmát. Ha ugyanis ezt a mennyiséget  $a_i$ -vel jelöljük, akkor

$$S_i = a_i + S_{i+1}.$$

Mivel  $S_{i+1}$  osztható  $(i+1)$ -gyel, másrészt  $0 \leq a_i < (i+1)$ , azért  $a_i$  éppen az a maradék, amit  $S_i$ -nek az  $(i+1)$ -gyel való osztásakor kapunk.  $i = 1$ -től indulva  $a_i$  értékei rendre meghatározhatók:

$i$	$S_i$	$i+1$	$a_i$
1	29	2	1
2	28	3	1
3	27	4	3
4	24	5	4
5	20	6	2
6	18	7	4
7	14	8	6
8	8	9	8
9	0	10	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lépcsőszám \ Doboz száma	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1	•	1	3	4	2	4	6	8
2	1	2	•	4	2	4	6	8
3	•	2	0	4	2	4	6	8
4	1	•	0	4	2	4	6	8
5	•	0	0	4	2	4	6	8
6	1	1	1	•	2	4	6	8
7	•	1	1	0	2	4	6	8
8	1	2	2	1	3	5	7	•
9	•	2	2	1	3	5	7	
10	1	•	2	1	3	5	7	
11	•	0	2	1	3	5	7	
12	1	1	3	2	4	6	•	
13	•	1	3	2	4	6		
14	1	2	•	2	4	6		
15	•	2	0	2	4	6		
16	1	•	0	2	4	6		
17	•	0	0	2	4	6		
18	1	1	1	3	5	•		
19	•	1	1	3	5			
20	1	2	2	4	•			
21	•	2	2	4				
22	1	•	2	4				
23	•	0	2	4				
24	1	1	3	•				
25	•	1	3					
26	1	2	•					
27	•	2						
28	1	•						
29	•							

Az így módon kapott elrendezésre teljesül a talált két feltétel:

- (a)  $i|S_i$  minden  $i$ -re;
- (b)  $0 \leq a_i \leq i$  minden  $i$ -re.

Megmutatjuk, hogy ha ez a két feltétel teljesül, akkor vagy minden doboz üres, vagy pedig van olyan doboz, amelyet kiürítve a két feltétel továbbra is igaz marad.

Ha nem minden doboz üres, akkor az utolsó nem üres doboz sorszámát  $k$ -val jelölve (a) szerint  $k|S_k$ . Ugyanakkor az utolsó nem üres dobozról lévén szó  $S_k = a_k$ , tehát  $0 < a_k \leq k$  miatt  $a_k = k$ , vagyis az utolsó nem üres doboz biztosan kiüríthető.

Ha most a legkisebb sorszámú kiüríthető dobozból vesszük ki a golyókat, akkor (b) továbbra is igaz marad, hiszen csak olyan dobozokban nő – mégpedig pontosan eggyel – a golyók száma, amelyek eddig nem voltak kiüríthetőek.

Mivel pedig  $S_i - s_i$  osztható  $i$ -vel, ezért a kiürítés után az (a) feltétel is igaz marad.

Az eljárás tehát csak akkor nem folytatható, ha valamennyi doboz üres, vagyis a leírt módszerrel általában is megkapjuk az  $S_1$  darab golyó (egyetlen) kiüríthető elrendezését.