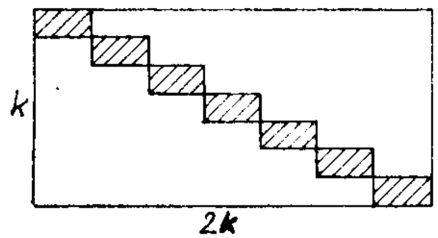
Nyilván feltehetjük, hogy $k \leq n$. Ha a bábukat a kívánt módon helyezzük el, akkor minden bástyához egyértelműen rendelhető hozzá az általa ütött bástya. Így bizonyos, hogy a kívánt módon csak páros számú bástyát lehet elhelyezni. Nevezzünk két egymást ütő bástyát „pár”-nak, a sakktábla sorait és oszlopait együttesen sávoknak. Egy pár 3 sávot foglal le, erre a 3 sávra további bástyát nem helyezhetünk.

A $k \times n$-es sakktáblán $k+n$ sáv áll rendelkezésre, így legfeljebb $\left[\frac{k+n}{3}\right]$ pár– azaz $2 \cdot \left[\frac{k+n}{3}\right]$ bástya – helyezhető el a kívánt módon.

Ugyanakkor a párok száma nyilván nem lehet nagyobb sem a vízszintes, sem pedig a függőleges sávok számánál. Ez $k \leq n$ miatt a $2k$ felső becslést adja.

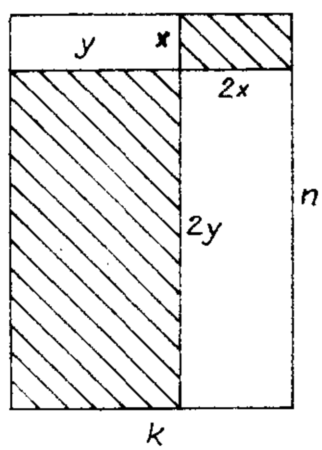
Ha $n > 2k$, akkor ez utóbbi becslés kisebb az előbbinél, másrészt ilyenkor $2k$ bástya el is helyezhető a kívánt módon (1. ábra).



1. ábra

Ha $n \leq 2k$, akkor $2 \cdot \left[\frac{k+n}{3}\right] \leq 2k$. Megmutatjuk, hogy $k \leq n \leq 2k$ esetén a $k \times n$-es sakktáblán $\left[\frac{k+n}{3}\right]$ megfelelő pár helyezhető el.

Láttuk, hogy azok a sakktáblák, amelyeknek egyik oldala kétszer akkora, mint a másik, kitölthetők a hosszabb oldalukkal párhuzamos állású párokkal. Próbáljuk ilyen részekre osztani a sakktáblánkat: (2. ábra)



2. ábra

Az ábra jelölései szerint: $x + 2y = n$, $y + 2x = k$, ahonnan

$$x = \frac{2k-n}{3} \quad \text{és} \quad y = \frac{2n-k}{3}.$$

Ha ezek a számok egészek, akkor vízszintesen és függőlegesen összesen $x + y = = \frac{k+n}{3}$ pár helyezhető el, ez pedig éppen $\left[\frac{k+n}{3}\right]$, hisz az egészrész jelen belül most egész szám áll.

Ha x vagy y nem egész, akkor a vízszintes téglalap oldalait $[x]$-nek és $2[x]$-nek választjuk. A függőleges téglalap oldalai most $k - 2[x]$ és $n - [x]$, ebben kell elhelyeznünk a hiányzó $u = \left[\frac{k+n}{3}\right] - [x]$ párt. Ez biztosan megtehető, ha a függőleges téglalap tartalmaz $u \times 2u$ oldalú résztéglalapot, azaz ha

$$k - 2[x] \geq u \quad \text{és} \quad n - [x] \geq 2u.$$

Az első egyenlőtlenség behelyettesítés és rendezés után a

$$\left[\frac{k+n}{3}\right]+\left[\frac{2k-n}{3}\right]\le k$$

alakot ölti. Ez pedig teljesül, hiszen az egészrész-jeleken belül levő számok összege k. A második egyenlőtlenségből, mivel n egész, és így $n+[x]=[n+x]$

$$2\cdot\left[\frac{k+n}{3}\right]\le n+\left[\frac{2k-n}{3}\right]=\left[2\cdot\frac{k+n}{3}\right]$$

adódik. A $2[t]\le[2t]$ egyenlőtlenség viszont minden számra teljesül.

Összefoglalva tehát: ha $n>2k$, akkor a $k\times n$-es sakktáblán legfeljebb $2k$, ha pedig $k\le n\le 2k$, akkor $2\cdot\left[\frac{k+n}{3}\right]$ darab bástya állítható föl a kívánt módon.

Megjegyzés. Sokan igazolták, hogy $2k$, ill. $2\cdot\left[\frac{k+n}{3}\right]$ felső korlátok – ez lényegében a 2064. gyakorlat megoldásából is kiderül –, azt azonban már nem vizsgálták, hogy ezek a korlátok elérhetők-e.