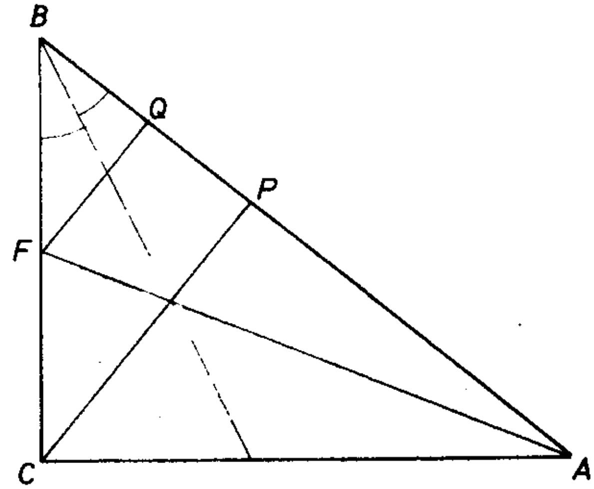
Jelöljük BC felezőpontját F-fel, a C-ből induló magasság talppontját P-vel, PB felezőpontját Q-val. Ekkor persze FQ középvonala a CPB háromszögnek.



A B-ből induló belső szögfelező szögfelezője az AFB háromszögnek is, tehát ez az egyenes az AF szakaszt a közrezáró oldalak arányában osztja:

$$AB : BF = AB : \frac{BC}{2} = \frac{2AB}{BC}. \tag{1}$$

Azt, hogy a CP magasságvonal az AF szakaszt milyen arányban osztja, a párhuzamos szelők tétele alapján számíthatjuk ki. Mivel $CP \parallel FQ$, ez az arány

$$AP : PQ = AP : \frac{PB}{2} = \frac{AP}{PC} : \frac{PB}{2PC} = \frac{AC}{CB} : \frac{CB}{2AC} = 2 \cdot \frac{AC^2}{BC^2}. \tag{2}$$

Itt kihasználtuk, hogy az APC, CPB, valamint ACB háromszögek hasonlóak.

A kérdezett három egyenes akkor és csak akkor megy át egy ponton, ha a szögfelező és a magasságvonal ugyanolyan arányban osztja a súlyvonalat, azaz ha az (1) és (2) alatti arányok egyenlők:

$$\frac{2AB}{BC} = \frac{2AC^2}{BC^2},$$

vagyis ha $AB \cdot BC = AC^2$. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzések. **1.** A feladat állítása könnyen adódik Ceva tételéből: Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalszakaszain felvéve az A_1, B_1, C_1 pontokat, AA_1, BB_1, CC_1 akkor és csak akkor megy át egy ponton, ha

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

Ennek alapján a feladat könnyen általánosítható tetszőleges háromszögre.

2. Egy AB átfogójú derékszögű háromszög oldalaira akkor és csak akkor teljesül az $AC^2 = BC \cdot AB$ összefüggés, ha a háromszög oldalainak aránya

$$AB : BC : CA = \left(1 + \sqrt{5}\right) : 2 : \sqrt{2 + 2\sqrt{5}}.$$