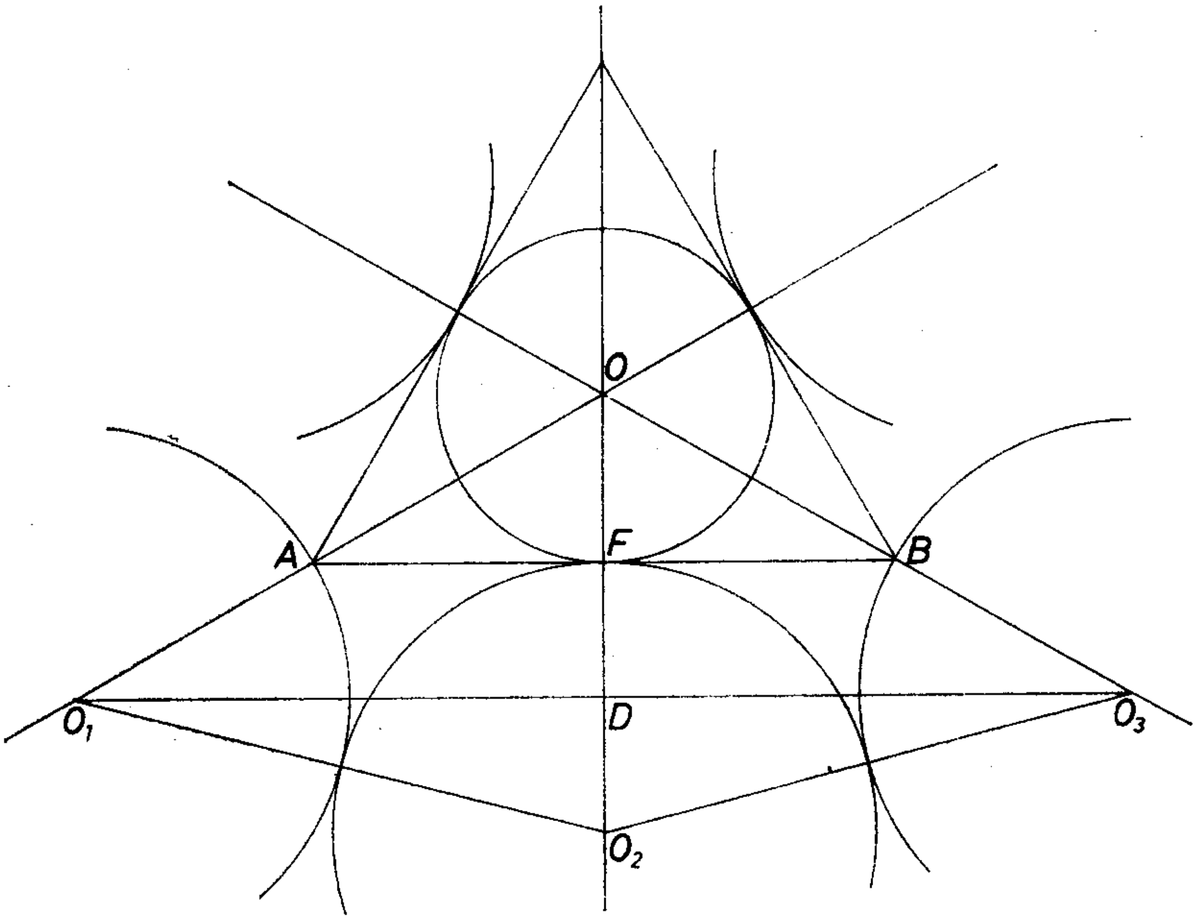
A háromszög szimmetriatengelyei az O középpontot a csúcsokkal összekötő egyenesek. Tekintsük ezeknek az OA, OF, OB félegyeneseit, ahol F az AB oldal felezőpontja. Az érintő köröknek ezekre illeszkedő középpontjait jelölje rendre O_1, O_2 és O_3 (1. ábra).



1. ábra

Mivel a köröknek a háromszöggel csak egy közös pontjuk van, az érintési pontok rendre az A, F, B pontok. Így $AO_1 = FO_2 = BO_3 = R$ az érintő körök sugara. Mivel e körök egymást is érintik, $O_1O_2 = O_2O_3 = 2R$, továbbá $OF = r$, $OA = OB = 2r$ és $FB = r\sqrt{3}$ ahol r a háromszögbe írt kör sugara.

Az $O_1OO_3O_2$ négyszög deltoid, ezért átlói merőlegesek egymásra. Legyen metszéspontjuk D. Az OFB és ODO_3 háromszögek hasonlóságából

$$DO_3 = \frac{OO_3 \cdot FB}{OB} = \sqrt{3}\frac{2r+R}{2}, \quad \text{és} \quad DO = \frac{OO_3 \cdot FO}{OB} = \frac{2r+R}{2}.$$

Ez utóbbiból $DO_2 = OO_2 - DO = (r+R) - DO = R/2$. Írjuk fel a DO_2O_3, D-ben derékszögű háromszög oldalaira a Pitagorasz–tételt:

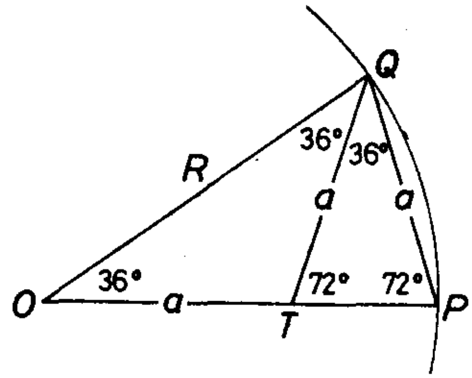
$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\frac{2r+R}{2}\right)^2 = (2R)^2.$$

Rendezve r-re másodfokú egyenletet kapunk: $r^2 + Rr - R^2 = 0$, ahonnan

$$r = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2},$$

mivel R és r egyaránt pozitív.

Most nézzük meg, milyen összefüggés áll fenn az O középpontú, R sugarú körbe írt szabályos tízszög a oldala és R között (2. ábra).



2. ábra

A tízszög PQ oldalához tartozó POQ középponti szög $36°$-os. A POQ egyenlő szárú háromszögben húzzuk meg az OQP $72°$-os szög belső szögfelezőjét, messe ez az OP oldalt T-ben. Ezzel két egyenlő szárú háromszöget, PQT-t és QTO-t kaptunk, tehát $PQ = QT = T0 = a$. A PQT és POQ háromszögek hasonlók, hiszen szögeik megegyeznek. Megfelelő oldalaik aránya

$$\frac{a}{R} = \frac{PQ}{OP} = \frac{PT}{PQ} = \frac{R-a}{a}.$$

Rendezés után $a^2 + aR - R^2 = 0$, amiből $a = \dfrac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. Ugyanazt az értéket kaptuk, mint előbb. Tehát valóban $a = r$, amit bizonyítani kellett.