

A számok abszolút értékének összege 1, így nem lehet valamennyi szám 0. A számok összege viszont 0, így van közöttük negatív és pozitív is. Legyenek az  $n$  darab szám közül a negatívak

$$(1) \quad a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k < 0,$$

a nem-negatívak

$$(2) \quad 0 \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n.$$

Ekkor  $1 \leq k < n$ , valamint

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k = -\frac{1}{2}, \quad a_{k+1} + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{1}{2},$$

hiszen csak így lehet a számok összege 0, abszolút értékeik összege pedig 1.

A  $k$  darab negatív  $a_1, a_2, \dots, a_k$  szám összege  $-1/2$ , tehát közülük a legkisebb nem lehet nagyobb  $-\frac{1}{2k}$ -nál. Hasonlóan, a nem-negatív  $a_{k+1}, \dots, a_n$  számok közül a legnagyobb,  $a_n$ , értéke legalább  $\frac{1}{2(n-k)}$ . Így

$$a_n - a_1 \geq \frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2k} = \frac{2n}{n^2 - (n-2k)^2} \geq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzések* 1. A legnagyobb és a legkisebb szám különbsége pontosan akkor  $\frac{2}{n}$ , amikor  $n = 2k$  és  $a_n = \frac{0,5}{n-k}$ ,  $a_1 = \frac{-0,5}{k}$  (vagyis az (1), (2) egyenlőtlenségeinkben mindenütt egyenlőség áll fenn).

Ha  $n$  páratlan, akkor a kérdéses különbség legalább  $\frac{2n}{n^2-1}$ . Ezt néhányan észre is vették.

2. Többen nem vették figyelembe, hogy az adott számok között nulla is lehet – ezeket minősítettük kissé hiányosnak.

Néhányan konkrét  $n$  értékekre mutatták meg a feladat feltételének teljesülését, és ebből „következtettek” a többi  $n$ -re (hogy, úgymond, a továbbiakban „látszik” az állítás igaz volta). Ezek a dolgozatok hibásnak minősültek.