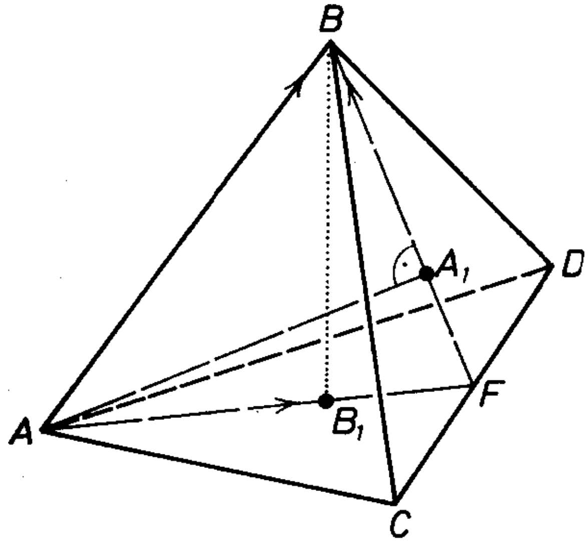
Először lássuk be, hogy az állítás igaz arra az esetre, amikor $\overrightarrow{PQ}$ a tetraéder valamelyik éle. Legyen pl. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$. Ekkor $\overrightarrow{AB}$ vetülete az ABC, ill az ABD tetraéderlapokon önmaga, az ACD lapon $\overrightarrow{AB_1}$, a BCD lapon $\overrightarrow{A_1B}$, ahol A_1, és B_1 a BCD, ill. az ACD szabályos háromszög súlypontja.



Jelölje F a CD él felezőpontját, ekkor $\overrightarrow{AB_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AF}$ és $\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FB}$, ezért

$$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{A_1B}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB},$$

tehát ebben az esetben a vetületek összege valóban $\dfrac{8}{3}\overrightarrow{AB}$.

Az állítás akkor is igaz, ha $\overrightarrow{PQ}$ párhuzamos a tetraéder valamelyik élével, mert akkor pl. $\overrightarrow{PQ}=a\cdot\overrightarrow{AB}$, ahol a valamilyen valós szám. Mivel a vektor a-szorosra változott, a-szorosra változnak a vetületek, s így azok összege is.

Ha pedig $\overrightarrow{PQ}$ nem párhuzamos a tetraéder egyik élével sem, akkor felbontható három, a tetraéder 1–1 oldalélével párhuzamos vektor összegére (hiszen ezek nem egy síkba eső vektorok). E komponensekre már tudjuk, hogy igaz az állítás, és mivel vektorok összegének egy síkra való vetülete egyenlő az egyes vektorok vetületének összegével, ebből következik, hogy az állítás e komponensek összegére is igaz.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Limbek Csaba (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján