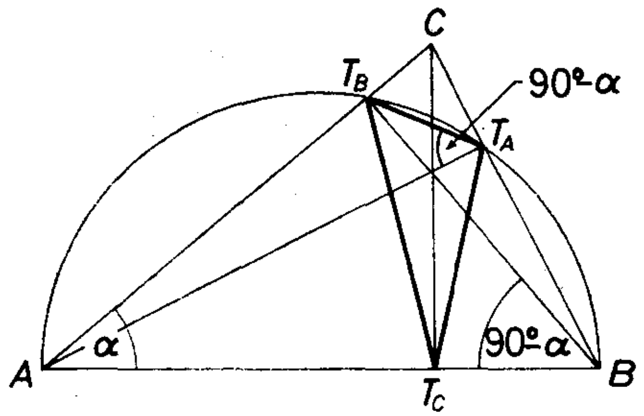
Jelöljük a hegyesszögű háromszög csúcsait A, B, C-vel, megfelelő szögeit α, β, γ-val úgy, hogy teljesüljön $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < 90°$. A magasságok talppontjai legyenek T_A, T_B, T_C, T_A az A-val, T_B a B-vel és T_C a C-vel van szemben.



Az AB oldal Thalész–körén rajta van T_A és T_B. Mivel a háromszög hegyesszögű, T_A és T_B AB-nek ugyanazon partján van, így a kerületi szögek egyenlősége miatt

$$ABT_B\sphericalangle = AT_AT_B\sphericalangle = 90° - \alpha.$$

Hasonlóan a többi oldalon $BCT_C\sphericalangle = BT_BT_C\sphericalangle = 90° - \beta$ és $CAT_A\sphericalangle = CT_CT_A\sphericalangle = 90° - \gamma$.

Ezt felhasználva a talpponti háromszög szögeit kifejezhetjük az α, β, γ szögekkel:

$$T_CT_AT_B\sphericalangle = 180° - 2\alpha, \quad T_AT_BT_C\sphericalangle = 180° - 2\beta, \quad T_BT_CT_A\sphericalangle = 180° - 2\gamma.$$

Ezek közül a $180° - 2\alpha$ legnagyobb a jelölésünk szerint, s emiatt

$$2\alpha + \gamma \leq \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Tehát

$$\gamma \leq 180° - 2\alpha.$$

Valóban, a talpponti háromszög legnagyobb szöge $(180° - 2\alpha)$ legalább akkora, mint az eredeti háromszög legnagyobb szöge. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $2\alpha + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$. $\alpha = \beta \leq \gamma < 90°$, amiből $45° < \alpha = \beta \leq 60°$, $60° \leq \gamma < 90°$ következik.

Az egyenlőség olyan egyenlő szárú háromszögekre teljesül, amelyekben a szárak által bezárt szög $60°$-nál nem kisebb hegyesszög.

Hraskó András (Bp., I. István Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A talpponti háromszög ***legkisebb*** szöge legfeljebb akkora, mint az eredeti háromszög legkisebb szöge. Itt az egyenlőség (szükséges és elégséges) feltétele: $60° \leq \beta = \gamma < 90°$.

2. Nem igaz az, hogy az egyenlőség bármilyen egyenlő szárú háromszögre érvényes! Mivel kiinduló feltevésünk szerint $\alpha \leq \beta \leq \gamma < 90°$, ezért nem elegendő feltétel az $\alpha = \beta$ egyenlőség. Ha ugyanis $\alpha = \beta > \gamma$ lenne, akkor a talpponti háromszögben már nem a $180° - 2\alpha$ nagyságú szög lenne a legnagyobb. A legtöbb hiányos dolgozat szerzője ezt a hibát követte el.